I.T.I. Malignani

Cervignano

Corso di Telecomunicazioni, classe V

Teoria dei segnali

Davide Manià

dicembre 2005 – V1.1

Teoria dei segnali

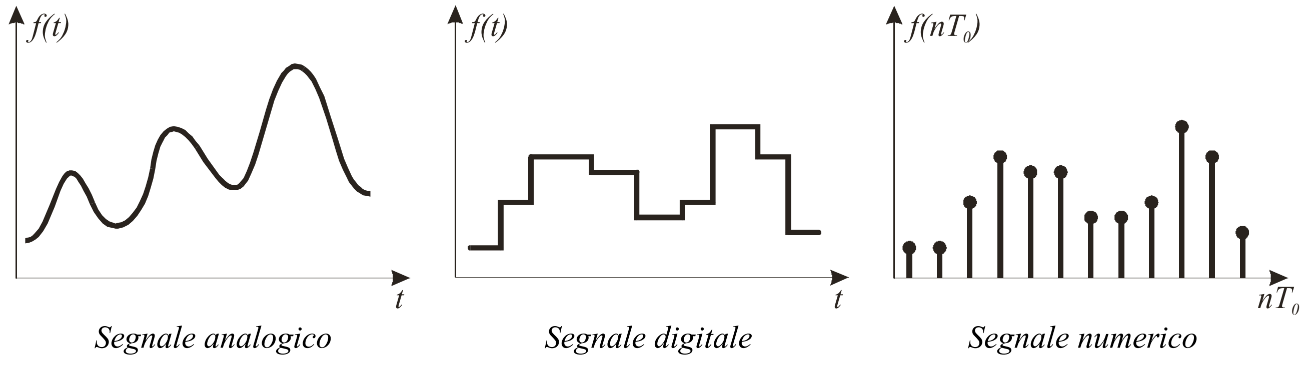
1. Introduzione

Lo scopo dei sistemi di telecomunicazioni è di trasportare informazione da una sorgente ad un destinatario. Riservandoci di approfondire in seguito il significato del termine *informazione*, possiamo fin d'ora notare che dal punto di vista circuitale questa si presenta sotto forma di un ***segnale***, che nei casi d'interesse pratico è generalmente elettrico.
Da qui segue l'importanza di una definizione chiara e di uno studio approfondito di questi enti, studio affidato ad una disciplina chiamata ***teoria dei segnali***. La teoria dei segnali è enormemente vasta, e richiede conoscenze matematiche di livello superiore per una sua trattazione rigorosa e coerente. Ciò nonostante, vista la sua vitale importanza nello studio dell'elettronica in generale e delle telecomunicazioni in particolare, si proverà nel seguito ad esporre un "condensato" di tale teoria, cercando di fornire le informazioni utili ai futuri periti. Purtroppo saranno inevitabili numerose lacune formali ed imprecisioni, alle quali il lettore interessato potrà trovare soluzione consultando uno dei numerosi testi specialistici attualmente in commercio.

> ***Nota:*** Per lo studio della teoria dei segnali non è in alcun modo possibile prescindere da alcuni prerequisiti matematici, in particolar modo lo studente dovrà assicurarsi di avere propri i concetti di *serie numerica*, *serie di funzioni* ed *integrale definito*. Seppure non indispensabile, la conoscenza delle *equazioni differenziali* permetterà di apprezzare la meravigliosa semplificazione che si ottiene applicando la trasformata di Fourier allo studio dei sistemi lineari.

2. Natura dei segnali

Per ***segnale*** intendiamo una funzione del tempo che descriva l'andamento di una qualsiasi grandezza fisica. La teoria tradizionale si occupa dello studio dei segnali ***analogici***, che variano con continuità sia nel tempo che in ampiezza. L'impiego, sempre più frequente, di dispositivi per l'elaborazione numerica dell'informazione ha dato grandissima importanza anche ai segnali ***digitali*** (continui nel tempo ma che possono assumere solo un insieme finito di valori per l'ampiezza) e a quelli ***numerici*** (discreti sia nel tempo che in ampiezza).



Segnale analogico *Segnale digitale* *Segnale numerico*

Ci occuperemo innanzitutto dello studio dei segnali analogici, che nel seguito saranno indicati genericamente con $f(t)$, intendendo con questo rappresentare indifferentemente una tensione o una corrente variabili nel tempo.
Una ulteriore classificazione dei segnali, indipendente da quanto appena visto, è quella che li divide in ***aperiodici*** e ***periodici***. Questi ultimi ripetono lo stesso andamento nel tempo all'infinito, in termini matematici si può affermare che esiste un valore $\boldsymbol{T}$, detto ***periodo***, tale che qualunque sia

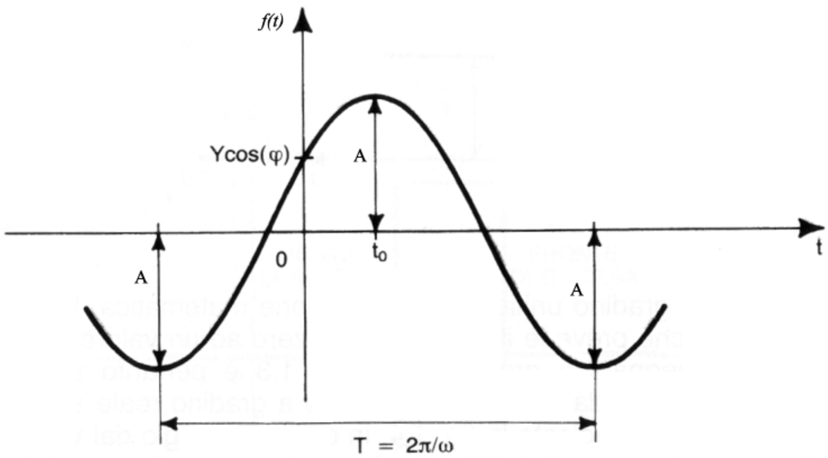
l'istante t considerato si ha *f(t)=f(t+T)*. Esempi tipici di segnali periodici sono le sinusoidi, le onde quadre o quelle a dente di sega. Segnali aperiodici sono la voce umana, il rumore, il disturbo provocato dalla scarica di un fulmine e moltissimi altri.
Si possono poi distinguere i segnali ***determinati*** che presentano un andamento in qualche modo completamente prevedibile, ad esempio con una legge matematica, e quelli ***aleatori*** che possono venir trattati solo dal punto di vista statistico (come ad esempio il rumore o il segnale proveniente da un sensore).

3. Segnali fondamentali

Nella pratica alcuni segnali si possono ritenere fondamentali, sia per il loro frequente impiego nella tecnica, sia per la loro importanza dal punto di vista teorico-matematico.
Il segnale ***sinusoidale*** è definito dal punto di vista matematico come

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad (3.1)$$

dove il parametro A è detto *ampiezza* della sinusoide e φ *fase*. Nella figura seguente è rappresentato il grafico di un segnale sinusoidale. Ovviamente al posto della funzione cos( ) si può utilizzare la sin( ), con l'unica accortezza di calcolare il giusto valore della fase iniziale φ.

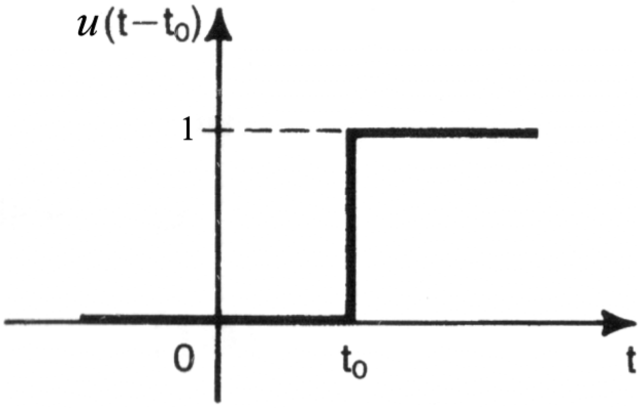


Segnale sinusoidale

Il ***gradino unitario*** u(t) è definito come

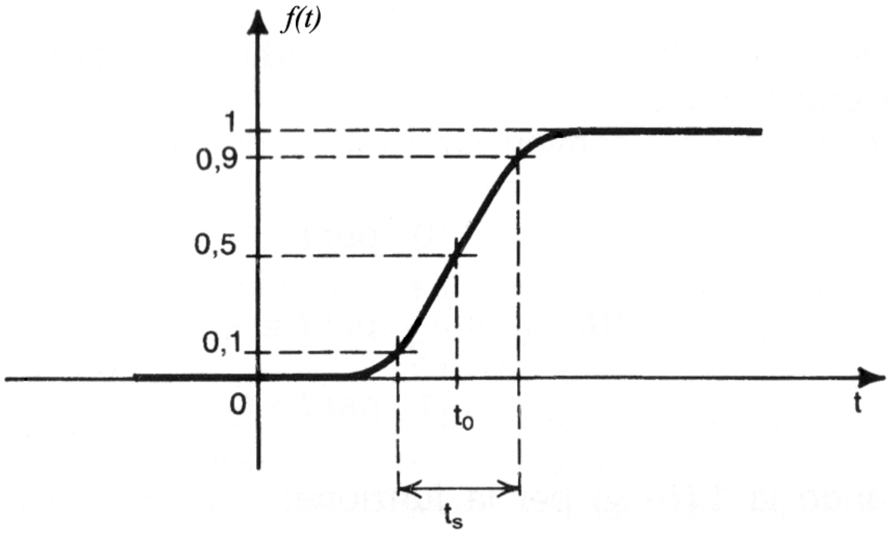
$$u(t) = \begin{cases} 0 \; per \, t < 0 \\ 1 \; per \, t \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

si tratta quindi di una funzione discontinua nell'origine. È interessante considerare anche la traslazione del gradino unitario sull'asse dei tempi, $u(t-t_0)$. Questo segnale è nullo per $t < t_0$, e vale 1 per $t \geq t_0$. Nella figura all'inizio della pagina seguente si vede un segnale a gradino unitario centrato all'istante t_0.



Gradino unitario ideale

Il gradino unitario non è fisicamente realizzabile, nella pratica si incontrano delle approssimazioni più o meno fedeli, caratterizzate da un certo tempo di salita, che convenzionalmente si fa corrispondere a quello necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale, come indicato nella figura.



Gradino unitario reale, con evidenziato il tempo di salita t_S

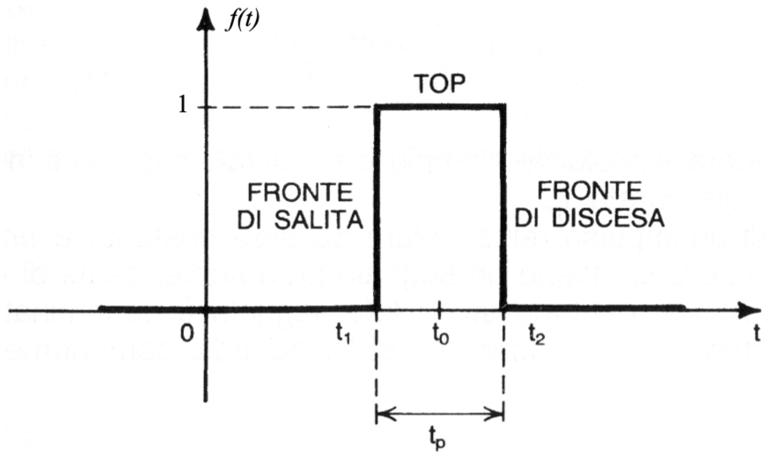
L'***impulso rettangolare*** è definito matematicamente come

$$f(t) = \begin{cases} 0 \; per \; t < t_1 \\ 1 \; per \; t_1 \le t \le t_2 \\ 0 \; per \; t > t_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

e può essere ottenuto a partire dal gradino unitario come

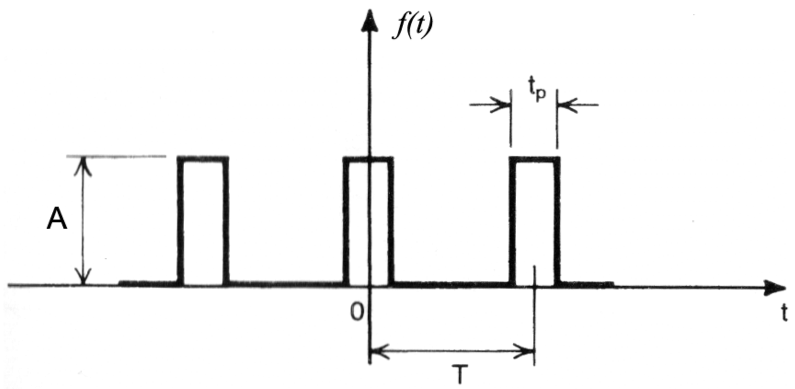
$$f(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2) \tag{3.4}$$

una rappresentazione dell'impulso rettangolare si trova nella figura seguente. Anche in questo caso il segnale reale, non potendo essere discontinuo, sarà "arrotondato" e richiederà un tempo finito sia per la salita che per la discesa.



Impulso rettangolare ideale

Se l'impulso rettangolare viene ripetuto nel tempo ad intervalli regolari si ottiene una funzione *periodica*, denominata ***onda quadra***. Nella figura l'ampiezza unitaria è stata moltiplicata per la costante A. La quantità t_p/T, dove t_p è il tempo in cui l'onda rimane allo stato alto e T il periodo totale, è detto ***duty cycle*** dell'onda quadra e si esprime generalmente in percentuale.



Forma d'onda rettangolare

Consideriamo ora un impulso rettangolare ideale centrato sull'origine, di durata ε ed ampiezza 1/ε. Come si può vedere facilmente l'area di questo impulso è sempre unitaria, indipendentemente dal valore scelto per la sua durata.
Si può immaginare allora di far tendere ε a 0, e quello che si ottiene è un particolarissimo segnale, di importanza fondamentale, denominato ***impulso*** (o ***delta***) ***di Dirac*** ed indicato con il simbolo δ(t).
Dal punto di vista matematico il delta di Dirac può essere definito come

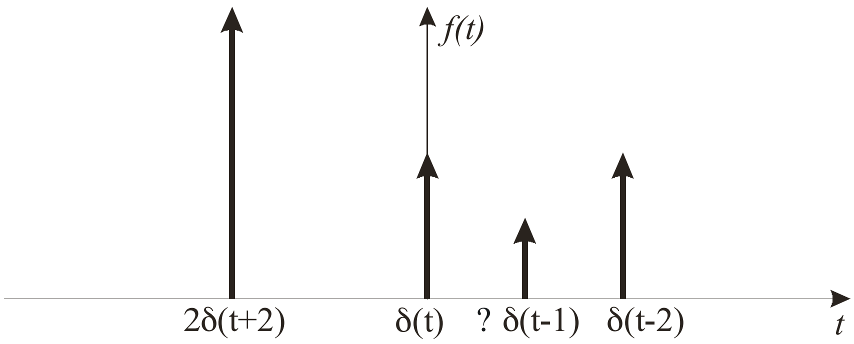
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \; per \, t \neq 0 \\ \infty \; per \, t = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

con la condizione però che sia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{3.6}$$

L'importanza dell'impulso di Dirac è principalmente teorica, esso è infatti alla base delle teorie del campionamento e della risposta impulsiva. Qualora si rendesse comunque necessario realizzarlo in

pratica lo si potrà approssimare con un impulso rettangolare di brevissima durata ed ampiezza elevata.
Il segnale $\delta(t-t_0)$ rappresenta un impulso di Dirac centrato sull'istante t_0, mentre $A\cdot\delta(t-t_0)$ sarà lo stesso con ampiezza A (anche se a rigore non si dovrebbe parlare di ampiezza per un impulso che va all'infinito, ma di area).
Nei grafici l'impulso si rappresenta con una freccia verticale di lunghezza proporzionale all'ampiezza (area) dell'impulso in questione.



Esempi di impulsi di Dirac

L'uso dell'impulso di Dirac come *campionatore* si desume dalla seguente proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{3.7}$$

facilmente verificabile dal punto di vista intuitivo, e valida qualunque sia il segnale *f(t)*.

Altri segnali che possono essere considerati fondamentali sono la ***rampa***, da cui si derivano i segnali ad ***onda triangolare*** e a ***dente di sega***, e quelli esponenziali, tipici dei fenomeni di carica e scarica di condensatori ed induttori.

4. La serie di Fourier

Sia *f(t)* un qualsiasi segnale periodico di periodo T (a rigore bisognerebbe imporre delle condizioni sulla funzione *f(t)*, ma queste sono sempre soddisfatte quando consideriamo segnali fisici). Il teorema di Fourier afferma che *f(t)* può essere sempre scomposta in una somma di infinite sinusoidi e cosinusoidi aventi frequenze multiple di quella del segnale in esame, e moltiplicate per opportuni coefficienti. In termini matematici si ha

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(n\omega_0 t) + b_n\cdot\sin(n\omega_0 t)\right] \tag{4.1}$$

dove si è posto

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{4.2}$$

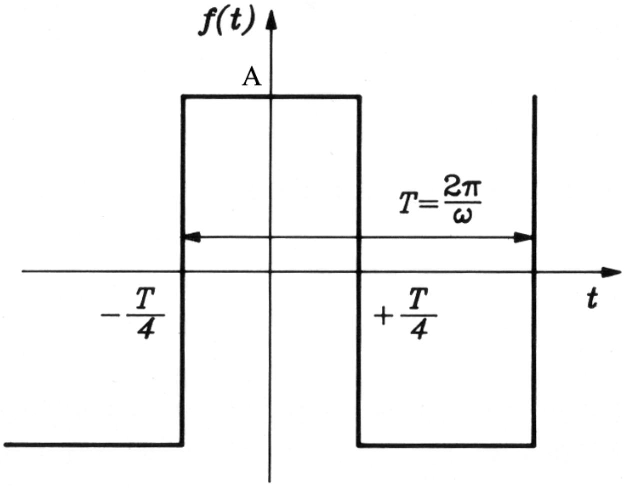
definendo così la ***pulsazione fondamentale*** del segnale. Il coefficiente a_0 rappresenta il valor medio del segnale nel periodo. Le sinusoidi si dicono *componenti armoniche*, o semplicemente *armoniche*.

Scomporre un segnale nella somma di tutte le sue armoniche richiede la determinazione dei coefficienti a_n e b_n. Il teorema di Fourier afferma che

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)dt
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Al di là delle difficoltà di ordine pratico che si possono incontrare nel calcolo di questi integrali, si vede che i coefficienti a_0, a_n e b_n sono completamente determinati una volta nota la *f(t)*.
È interessante notare che se la funzione *f(t)* è dispari il primo ed il secondo integrale della 4.3 si annullano, e con essi il coefficiente a_0 e tutti gli a_n. Se invece la funzione è pari sarà il terzo integrale della 4.3 ad annullarsi, e con esso tutti i coefficienti b_n. Si può quindi affermare che un segnale pari (tale cioè che $f(-t) = f(t)$) può essere sviluppata come una serie di soli coseni, mentre se la funzione è dispari ($f(-t) = -f(t)$) lo sviluppo sarà di soli seni.

Esempio: trovare lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra con valore medio nullo ed ampiezza di picco A rappresentata nella figura.



La funzione è a valor medio nullo, quindi il coefficiente a_0 sarà nullo. È pari, pertanto saranno nulli anche tutti i b_n. Calcoliamo dunque gli a_n facendo uso delle 4.3:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}(-A)\cos(n\omega_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}A\cos(n\omega_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}(-A)\cos(n\omega_0 t)dt =$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{-A}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2}{T}\left[\frac{A}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \frac{2}{T}\left[-\frac{A}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{-2A}{n\omega_0 T}\left[\sin(-n\omega_0\frac{T}{4}) - \sin(-n\omega_0\frac{T}{2})\right] +$$

$$+ \frac{2A}{n\omega_0 T}\left[\sin(n\omega_0\frac{T}{4}) - \sin(-n\omega_0\frac{T}{4})\right] + \frac{-2A}{n\omega_0 T}\left[\sin(n\omega_0\frac{T}{2}) - \sin(n\omega_0\frac{T}{4})\right] =$$

$$= \frac{-2A}{2n\pi}\left[-\sin(\frac{2n\pi}{4}) - \sin(-\frac{2n\pi}{2})\right] + \frac{2A}{2n\pi}\left[\sin(\frac{2n\pi}{4}) - \sin(-\frac{2n\pi}{4})\right] + \frac{-2A}{2n\pi}\left[\sin(\frac{2n\pi}{2}) - \sin(\frac{2n\pi}{4})\right] =$$

$$= -\frac{A}{n\pi}\left[-\sin(\frac{n\pi}{2}) + \sin(n\pi)\right] + \frac{A}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi}{2}) + \sin(\frac{n\pi}{2})\right] - \frac{A}{n\pi}\left[\sin(n\pi) - \sin(\frac{n\pi}{2})\right] =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2A}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{A}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{4A}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2})$$

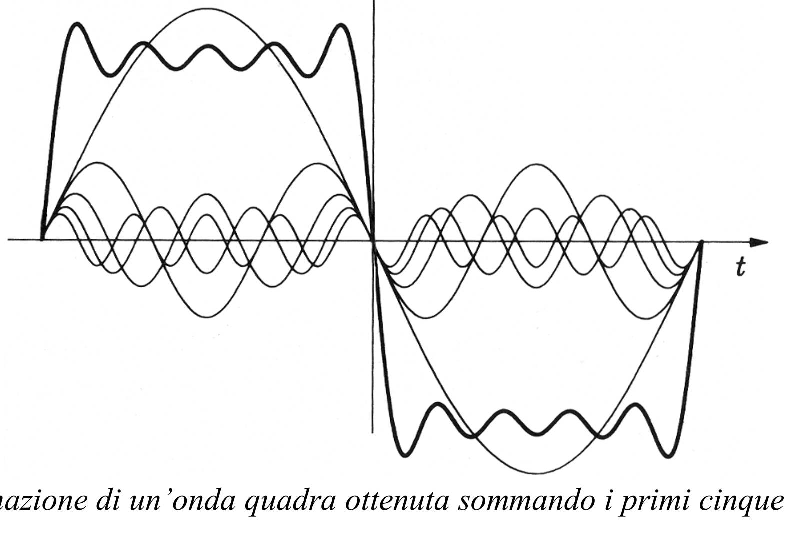
dove per semplificare si è fatto uso della relazione 4.2. Calcolando i valori dei primi coefficienti otteniamo

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{4A}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4A}{3\pi},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{4A}{5\pi},\ \ldots \tag{4.5}$$

ad esempio per A=1, T=1 ms (f= 1KHz) si avrà

$$f(t) = 1.27\cos(6.28\cdot 10^3 t) - 0.42\cos(18.8\cdot 10^3 t) + 0.25\cos(31.4\cdot 10^3 t) + \ldots \tag{4.6}$$

Nella figura seguente sono rappresentate a tratto sottile le prime cinque componenti armoniche di un'onda quadra, e con tratto più marcato il segnale che si ottiene dalla loro somma. Ovviamente maggiore è il numero di armonici considerato migliore sarà l'approssimazione con cui il segnale viene ricostruito. Il valore dei coefficienti, che rappresenta l'ampiezza delle componenti armoniche che sommate danno l'onda quadra di partenza, possono venir rappresentati in un grafico, e costituiscono lo ***spettro*** del segnale analizzato.



Approssimazione di un'onda quadra ottenuta sommando i primi cinque armonici

Al posto della forma indicata nella 4.1 può essere comodo utilizzare una rappresentazione equivalente, che si può ricavare con semplici considerazioni trigonometriche.

Consideriamo l'espressione generale

$$A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha) \tag{4.7}$$

questa può essere riscritta nella forma

$$(A^2 + B^2) \cdot \left[\frac{A}{A^2 + B^2}\cos(\alpha) + \frac{B}{A^2 + B^2}\sin(\alpha) \right] \tag{4.8}$$

i due coefficienti che moltiplicano rispettivamente il seno ed il coseno di α possono venir interpretati come il seno ed il coseno di un angolo φ tale che

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \frac{B}{A^2 + B^2} \\ \cos(\varphi) &= \frac{A}{A^2 + B^2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Applicando quanto visto alla 4.1 si ricava, utilizzando la formula del coseno di una somma,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \tag{4.10}$$

dove

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} \\ \varphi_n &= \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

I coefficienti A_n costituiscono quello che si chiamo ***spettro di ampiezza***, mentre i φ_n costituiscono lo ***spettro di fase*** del segnale in esame. L'analizzatore di spettro tradizionale mostra sul suo display lo spettro di ampiezza del segnale applicato al suo ingresso, per vedere anche lo spettro di fase bisogna utilizzare apparecchiature molto più sofisticate (chiamate *vector spectrum analyzer)*.

5. Forma esponenziale della serie di Fourier

La rappresentazione di un segnale mediante la scomposizione in serie di Fourier, che lo considera come la somma di sinusoidi, ha il pregio di essere vicina alla realtà fisica dei segnali, per i quali si può trovare una corrispondenza immediata tra andamento nel tempo e spettro.
Come vedremo nel seguito, la scomposizione in serie di Fourier ha implicazioni importantissime nello studio della risposta dei circuiti (anzi, dei sistemi in generale), per le quali è conveniente utilizzare una rappresentazione un pochino più "astratta", che fa uso degli esponenziali complessi come funzioni base.
Ricordiamo prima di tutto le classiche formule di Eulero:

$$\begin{cases} e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha) \\ e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j\sin(\alpha) \end{cases} \tag{5.1}$$

dalle quali si ricava immediatamente (sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti):

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \end{cases} \tag{5.2}$$

Sostituendo queste espressioni nella 4.1 si ottiene

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right] \tag{5.3}$$

da cui raccogliendo gli esponenziali a fattor comune si ricava

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{jn\omega_0 t}\frac{(a_n - jb_n)}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{(a_n + jb_n)}{2}\right] \tag{5.4}$$

poniamo ora, per semplicità,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ C_n^* &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sostituendo nelle relazioni appena calcolate le 4.3 otteniamo

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)\right]dt \tag{5.6}$$

e quindi

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad C_n^* = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt \tag{5.7}$$

Inoltre, per quanto riguarda il termine a_0, si ha

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{j0}dt = C_0 \tag{5.8}$$

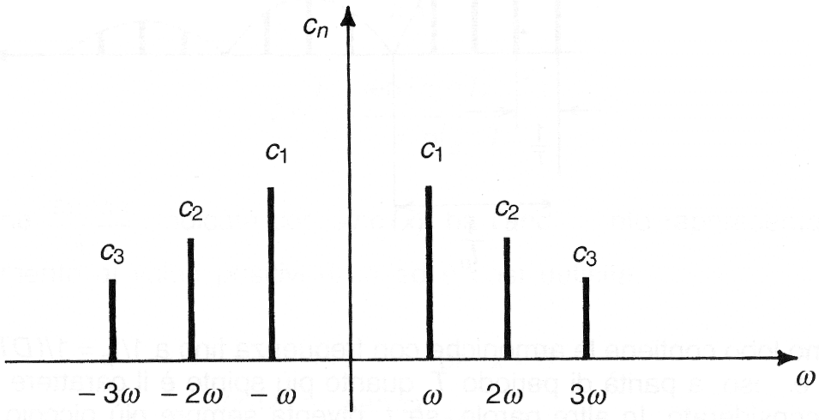
Con queste convenzioni la 5.4 può essere riscritta come

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + C_n^* \cdot e^{-jn\omega_0 t} \tag{5.9}$$

e, tenendo conto che $C_n^* = C_{-n}$ e $C_0 = a_0$, si arriva all'espressione finale

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \tag{5.10}$$

Lo spettro che si ottiene con questa rappresentazione è fatto da numeri complessi (i C_n), con l'indice n che va da -∞ a +∞. Si ottiene così quello che viene denominato ***spettro bilatero*** della *f(t)*.
Ogni armonica complessa con indice n positivo è accompagnata da una corrispondente armonica con indice negativo: la somma delle due porta sempre alla n-esima armonica reale, che si può "toccare con mano" ad esempio con l'analizzatore di spettro. Fa eccezione il coefficiente C_0, che continua a rappresentare il valor medio del segnale in un periodo. Nella figura è rappresentato un esempio di spettro bilatero. Essendo i coefficienti complessi, nel grafico ne è stato riportato solo il modulo.



Esempio di spettro bilatero

I coefficienti C_n mostrano una relazione immediata con gli A_n calcolati in precedenza. Da un confronto tra le relazioni 5.5 e le 4.11 si vede infatti che

$$\begin{aligned} |C_n|^2 &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{4}A_n^2 \\ \arg(C_n) &= \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \varphi_n \end{aligned} \tag{5.11}$$

6. Considerazioni energetiche

Fino ad ora ci siamo interessato soltanto dello spettro di ampiezza (e fase) dei segnali. Nelle applicazioni pratiche è però importante analizzare anche la potenza associata ad una generica forma d'onda. A tal proposto osserviamo che la potenza istantanea si può esprimere come

$$P(t) = R \cdot f^2(t) \;\; oppure \;\; P(t) = \frac{f^2(t)}{R} \tag{6.1}$$

dove la prima delle due relazioni vale nel caso in cui *f(t)* rappresenti una corrente, l'altra una tensione, applicate ad una resistenza di valore R. Per le considerazioni della teoria dei segnali si può effettuare una semplificazione supponendo di avere a che fare con una resistenza del valore normalizzato di 1Ω. Questo semplificazione non cambia le considerazioni che faremo nel seguito, ma permette di affermare che

$$P(t) = f^2(t) \tag{6.2}$$

Consideriamo adesso un intervallo infinitesimo *dt*. L'energia fornita dal segnale in questo intervallo di tempo vale $dE = f^2(t) \cdot dt$; integrando da –T/2 a T/2 otteniamo l'energia fornita in un periodo.

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt \tag{6.3}$$

e dividendo per T si può trovare la potenza media in un periodo

$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt \tag{6.4}$$

A tal proposito ricordiamo che un segnale si definisce ***di energia*** quando la sua energia totale, ottenuta integrando il quadrato di *f(t)* da -∞ a +∞, ha un valore finito; si dice invece ***di potenza*** quando la sua potenza media ha un valore finito.

Va da sé che un segnale non può essere contemporaneamente di energia e di potenza: esempi di segnali di energia tipo sono quelli comunemente detti impulsivi, mentre i segnali periodici visti finora sono esempi di segnali di potenza.

È interessante chiederci se sia possibile estendere il concetto di analisi spettrale anche all'energia del segnale, ovvero analizzare come quest'ultima sia distribuita nelle varie armoniche. Tralasciando la dimostrazione (comunque non difficile) possiamo enunciare il risultato del ***teorema di Parseval***:

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left| C_n \right|^2 \tag{6.5}$$

Questo teorema asserisce che la distribuzione spettrale dell'energia di un segnale è proporzionale al quadrato dei coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier. Il risultato può essere immediatamente esteso anche al calcolo della distribuzione spettrale di potenza. La potenza media è infatti fornita dalla formula

$$P_{media} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left|C_n^2\right| \qquad (6.6)$$

e quindi si può calcolare la potenza media di un segnale qualsiasi come la somma delle potenze delle singole armoniche.
Collegato con il concetto di potenza media vi è poi quello di valore efficace:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left|C_n\right|^2} \qquad (6.7)$$

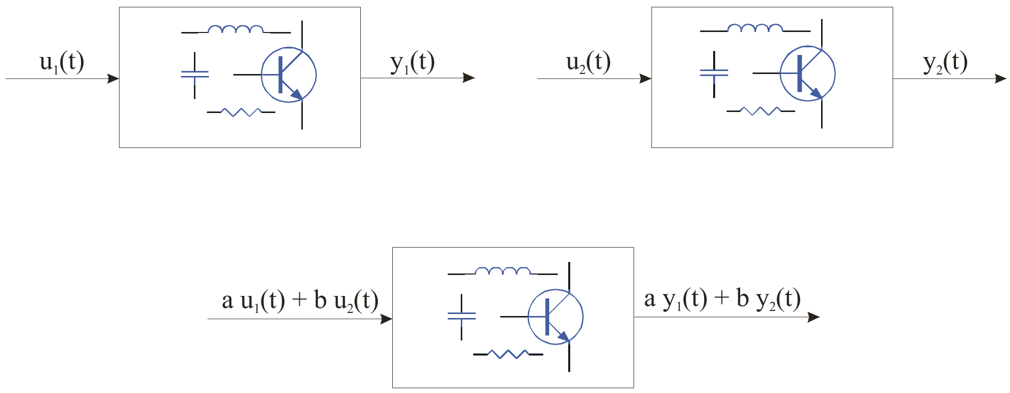
Tenendo conto che $\left|C_n\right|^2$ è pari ad ½ del valore efficace associato all'armonica n-esima al quadrato, e che lo stesso si può dire per $\left|C_{-n}\right|^2$ (si vedano le relazioni 5.11 in caso di dubbio), la 6.7 può venir riscritta come

$$V_{eff} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V_{n\,eff}^{\;\;2}} \qquad (6.8)$$

ottenendo in pratica che il valore efficace di segnale, qualsiasi sia la sua forma d'onda, può essere calcolato come la radice della somma dei quadrati dei valori efficaci delle singole armoniche. In pratica nella maggior parte dei casi basterà considerare un numero limitato di armoniche, in quanto la loro potenza tende rapidamente a diventare trascurabile al crescere di n.

7. Risposta di un circuito lineare

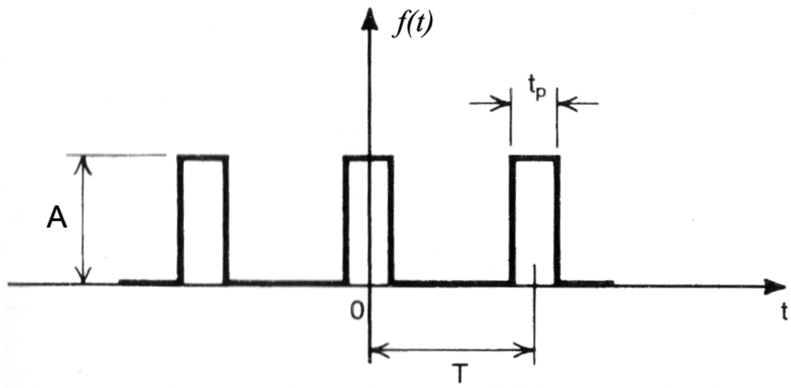
L'utilizzo della scomposizione in serie di Fourier permette di ricavare il segnale in uscita da un generico circuito lineare, una volta che di questo sia noto il comportamento nei confronti dei segnali sinusoidali.
Sarà infatti sufficiente, in linea di principio, scomporre il segnale di ingresso in serie di Fourier, trovare l'uscita corrispondente ad ogni singola armonica e poi sommare tutti i risultati per avere il segnale d'uscita. La linearità del sistema garantisce che il procedimento è corretto. Ricordiamo infatti che un sistema si dice lineare quando ad esso è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. La figura alla pagina seguente mostra come la risposta a due distinti segnali $u_1(t)$ ed $u_2(t)$ possa essere utilizzata per calcolare la risposta ad una qualsiasi combinazione dei due.
Pur essendoci importantissimi esempi di circuiti non lineari in elettronica (basti pensare ad esempio al digitale, dove le porte logiche sono sicuramente non lineari) la linearità è una condizione che semplifica enormemente lo studio dei sistemi, proprio perché consente di applicare il procedimento descritto poc'anzi. Esempi tipici di sistemi lineari sono i filtri, gli amplificatori, le antenne ecc.



Risposta di un sistema lineare alla somma di due segnali

8. L'impulso rettangolare

Nello studio dei sistemi di telecomunicazioni digitali riveste enorme importanza l'impulso rettangolare, o l'onda quadra da esso derivata. Tale impulso infatti ha il compito di trasportare i bit di informazione trasmessi sui mezzi fisici più disparati.
Sarà quindi opportuno soffermarci sull'analisi spettrale di questo segnale, per metterne in luce alcune peculiarità. Va da sé che la conoscenza approfondita dello spettro di un segnale è fondamentale per analizzare come questo si trasforma nel passaggio attraverso il canale di trasmissione.
Consideriamo di nuovo il segnale, già visto a pag. 5, e qui riportato per comodità:



La funzione che rappresenta il segnale è pari, per cui saranno nulli tutti i termini b_n della 4.1; calcoliamo innanzitutto il termine a_0, corrispondente al valore medio:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} Adt = \frac{A \cdot t_p}{T} \tag{8.1}$$

e poi i termini a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} A\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2A}{n\omega_0 t}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} \tag{8.2}$$

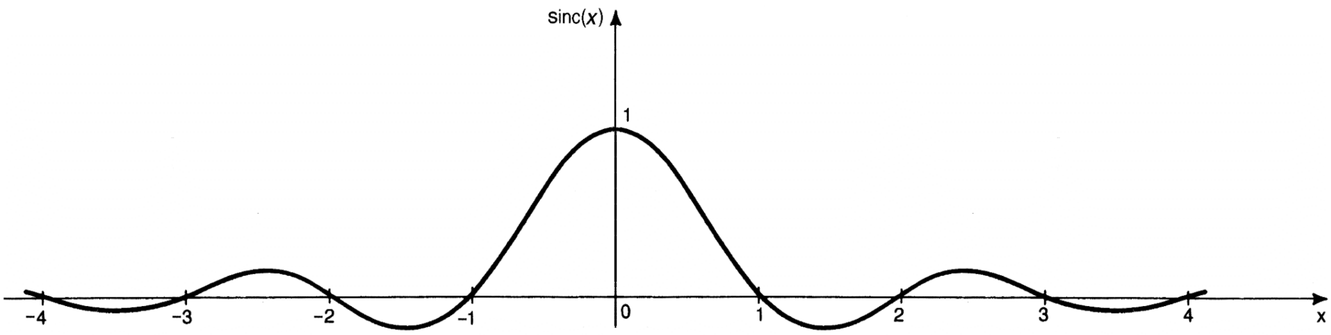
ponendo $\omega_0 = 2\pi/T$ si ottiene

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t_p}{T}\right) = 2A\frac{t_p}{T}\frac{\sin(n\pi t_p/T)}{n\pi t_p/T} \tag{8.3}$$

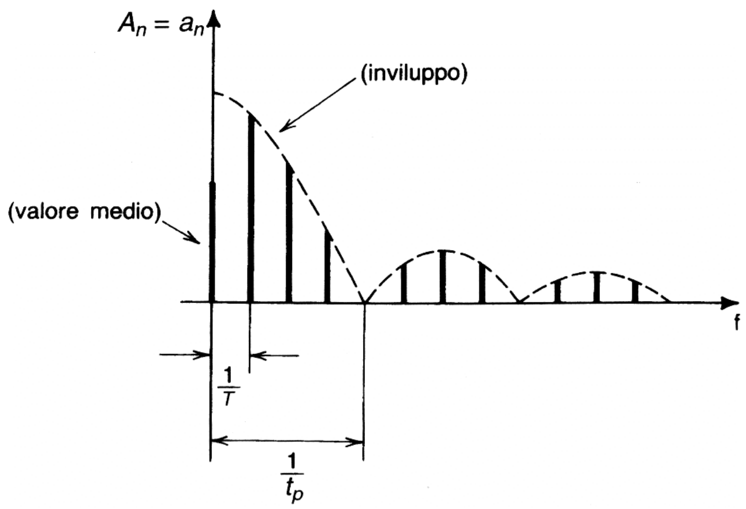
dove l'ultima espressione è stata scritta in modo da evidenziare la presenza della funzione $\sin(\pi x)/\pi x$, detta anche sinc(x). Questa funzione, molto importante nelle telecomunicazioni, è definita così:

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & per \ \ x \neq 0 \\ 1 \ \ per \ \ x = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

ed il suo grafico è il seguente:



La 8.3 fornisce il valore dei coefficienti a_n, che può essere riportato in un grafico mostrando così lo spettro associato agli impulsi rettangolari. Nel grafico sono rappresentate le ampiezze delle varie armoniche, come potrebbero essere viste su un analizzatore di spettro, per cui i lobi della funzione *sinc*( ) sono tutti positivi.



Si notano immediatamente due proprietà interessanti: La distanza tra una riga dello spettro e la successiva è sempre pari alla frequenza fondamentale del segnale ($f_0 = 1/T$), mentre la forma dell'inviluppo dipende solo dalla durata della parte positiva dell'impulso (t_p). Restringendo la durata dell'impulso e lasciandone inalterata la frequenza si vedrà il primo lobo dello spettro

allargarsi, e la distanza tra le righe rimanere costante. Diminuendo invece la frequenza, a parità delle durata dell'impulso, si noterà che le linee dello spettro diventeranno sempre più fitte, ma l'andamento (inviluppo) rimarrà sempre lo stesso.
Volendo esprimere lo spettro in forma esponenziale, come visto al paragrafo 5, si possono calcolare i coefficienti C_n come

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} A\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{A}{j\omega nT}\left[-e^{-jn\omega_0 t}\right]_{-\frac{t_p}{2}}^{\frac{t_p}{2}} = \frac{A}{j\omega nT}\left(e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

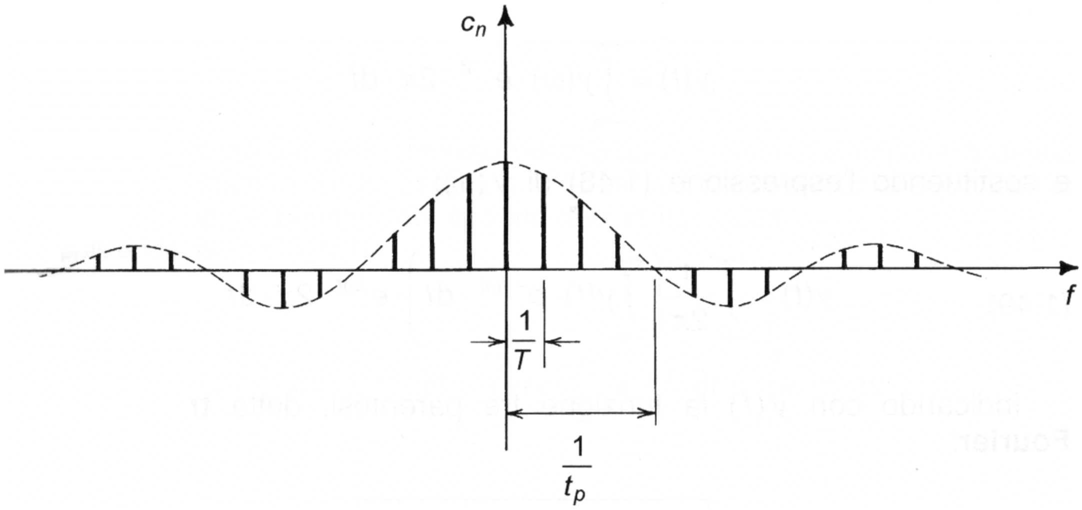
da cui, ricordando ancora che $\omega_0 = 2\pi/T$ si ottiene

$$C_n = \frac{A}{T}\frac{e^{jnt_p/T}-e^{-jnt_p/T}}{j2\pi n/T} = \frac{A\cdot t_p}{T}\frac{e^{jnt_p/T}-e^{-jnt_p/T}}{j2\pi nt_p/T} \tag{8.7}$$

infine, tenendo presente le relazioni di Eulero, corrispondenti alle 5.2, si ha

$$C_n = \frac{A\cdot t_p}{T}\frac{\sin(\pi nt_p/T)}{\pi nt_p/T} = \frac{A\cdot t_p}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{nt_p}{T}\right) \tag{8.8}$$

Lo spettro bilatero ha quindi l'andamento mostrato nella figura seguente, ove si vede il caratteristico profilo della funzione *sinc*( ).

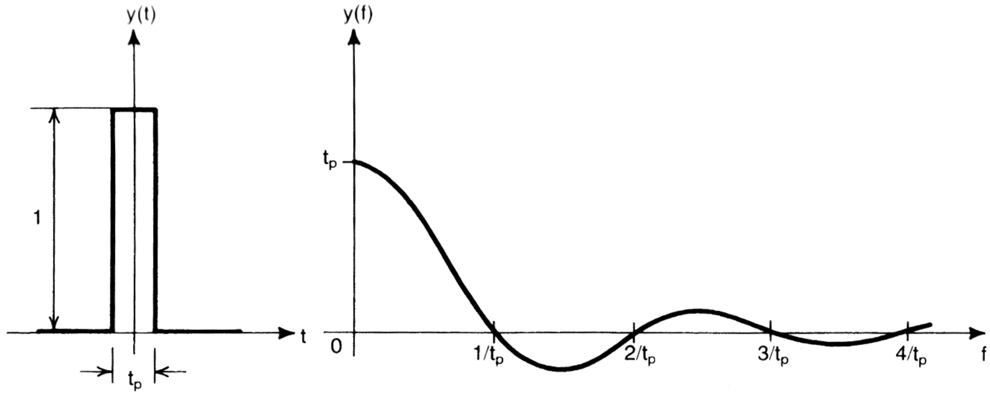


Rispetto allo spettro unilatero relativo allo stesso segnale si può vedere che l'ampiezza delle singole righe si è ridotta alla metà. In questo grafico, essendo tutti i C_n reali, si è preferito indicarne anche il segno, in caso contrario i lobi della *sinc*( ) sarebbero tutti positivi, e si dovrebbe indicare accanto allo spettro di ampiezza anche il corrispondente spettro di fase.

9. I segnali non periodici e la trasformata di Fourier

Finora ci siamo occupati della scomposizione in armonici dei segnali periodici, e abbiamo visto come la frequenza delle componenti armoniche sia sempre multipla di quella del segnale originale.
L'importanza della serie di Fourier nello studio della risposta dei sistemi lineari è così grande che ben presto è sorta tra i primi studiosi della materia la necessità di trovare un meccanismo simile che permettesse lo studio di segnali non periodici. Questi segnali, che sono rappresentati in pratica nella maggior parte delle applicazioni reali (dove alla forma d'onda dei segnali è associata l'*informazione*

che deve venir trasmessa, che proprio in quanto tale non può essere strettamente periodica), non possono essere sviluppati in serie come visto, per motivi facilmente comprensibili.
Ciò nonostante è possibile estendere la definizione di serie di Fourier anche ai segnali non periodici, immaginando di dilatare sempre più l'ampiezza del periodo fino ad arrivare all'infinito.
Ad esempio, volendo trovare lo spettro di un impulso rettangolare isolato, di durata t_p, si potrebbe cercare prima quello dell'onda rettangolare e poi osservare cosa succede al tendere di T all'infinito.
Come si è già avuto modo di notare in precedenza, l'allargamento del periodo T causa una diminuzione della distanza tra le righe dello spettro, che al limite tenderanno a diventare una funzione continua quando l'impulso sarà isolato. La forma dello spettro, data dall'inviluppo della funzione *sinc*( ) rimarrà sempre la stessa. La situazione è rappresentata nella seguente figura:



Impulso rettangolare isolato e spettro corrispondente

Dal punto di vista matematico, le relazioni viste alla fine del paragrafo 5, riguardanti l'espressione esponenziale della serie di Fourier, che vengono riportate di nuovo per comodità si modificano.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (9.1)$$

Al tendere all'infinito di T la distanza tra le righe ω_0 tende a diventare infinitesima, ed il termine $n\omega_0\, t$ diventa una variabile continua, denominata $\boldsymbol{\omega}$. Le due relazioni di cui sopra si modificano e possono venir scritte come

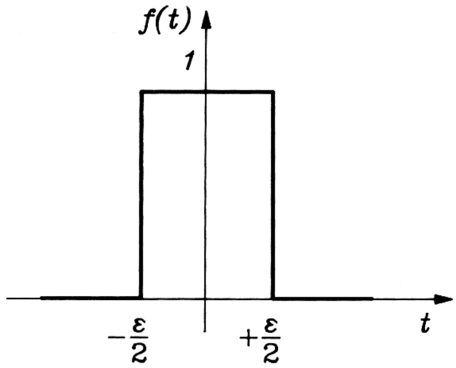
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad (9.2)$$

dette rispettivamente ***trasformata*** ed ***antitrasformata di Fourier***. Questa coppia di relazioni associa ad ogni segnale nel dominio del tempo un corrispondente spettro nel dominio della frequenza, e viceversa. In termini intuitivi un segnale non periodico può ancora essere pensato come una somma di sinusoidi, ma le frequenze di quest'ultime coprono tutto un intervallo invece di assumere solo alcuni valori discreti.

Esempio: Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \;\; se \;\; -\dfrac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \;\; altrimenti \end{cases} \tag{9.3}$$

corrispondente ad un impulso rettangolare singolo, centrato sull'origine, come rappresentato nella seguente figura:



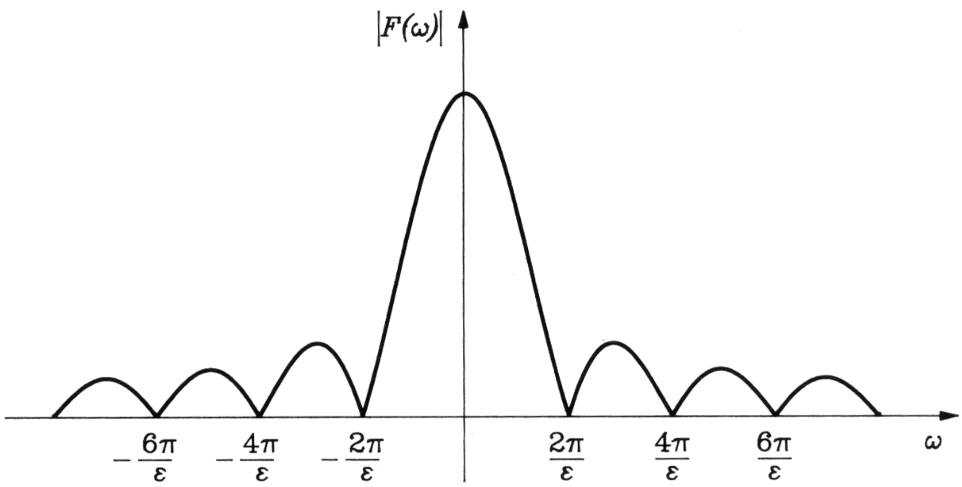
applicando la definizione di trasformata di Fourier si ricava che

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{j\omega} \left[e^{-j\omega\frac{\varepsilon}{2}} - e^{j\omega\frac{\varepsilon}{2}} \right] \tag{9.4}$$

che, ricordando le formule di Eulero, diventa

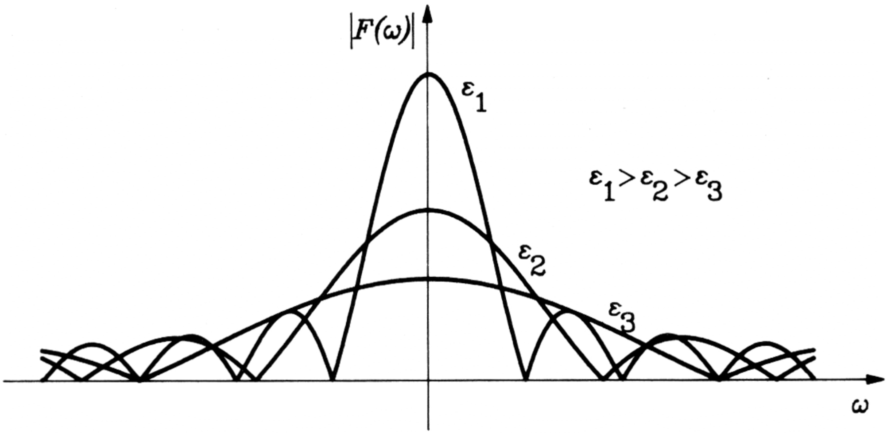
$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \frac{\sin\left(\omega \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\omega \frac{\varepsilon}{2}} \tag{9.5}$$

nella figura seguente è riportato l'andamento in frequenza della trasformata, che mostra il caratteristico andamento della funzione *sinc*( ).



La F(ω) si annulla quando l'argomento del seno è un multiplo di π, cioè quando $\omega = \dfrac{2k\pi}{\varepsilon}$.

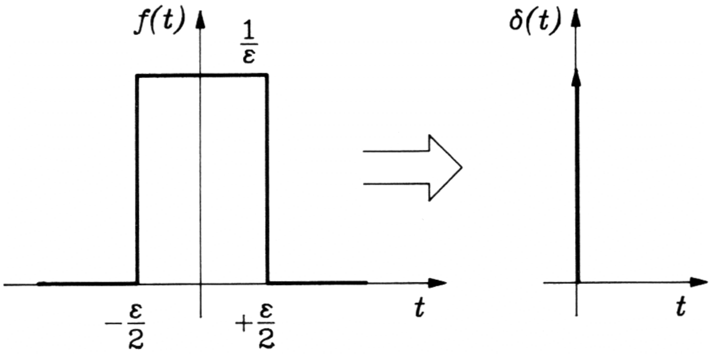
All'aumentare della durata dell'impulso i lobi si restringono sempre più, mentre se la durata dell'impulso viene ridotta il lobo principale si allarga mentre la sua ampiezza diminuisce. Nella figura seguente si vedono le trasformate di tre impulsi aventi diversa durata (diversi valori di ε).



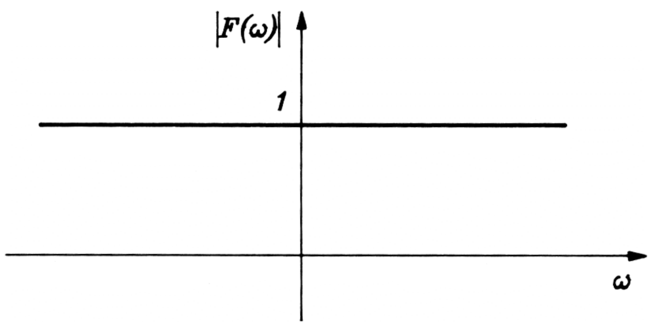
Andamento dello spettro dell'impulso rettangolare al variare della sua durata

Si notino le analogie con quanto visto al paragrafo 4, relativamente allo sviluppo in serie di Fourier dell'onda rettangolare. L'andamento dei lobi rimane lo stesso, ma il pettine di righe è diventato una funzione continua della pulsazione ω.

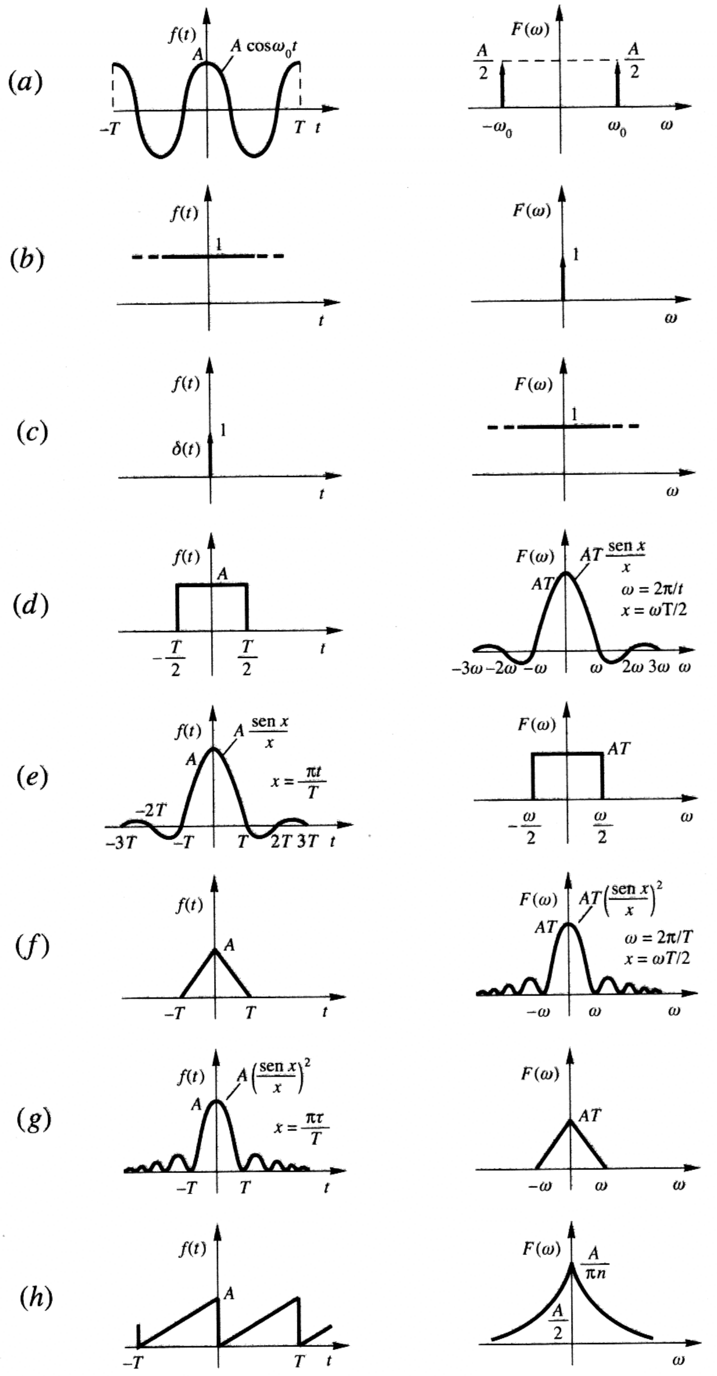
Se si fa tendere a 0 la durata dell'impulso, moltiplicandone l'ampiezza per 1/ε, si ottiene quello che nel paragrafo 3 è stato denominato *delta di Dirac*.



Osservando il limite della 9.5 per ε → 0 si ottiene la trasformata dell'impulso di Dirac

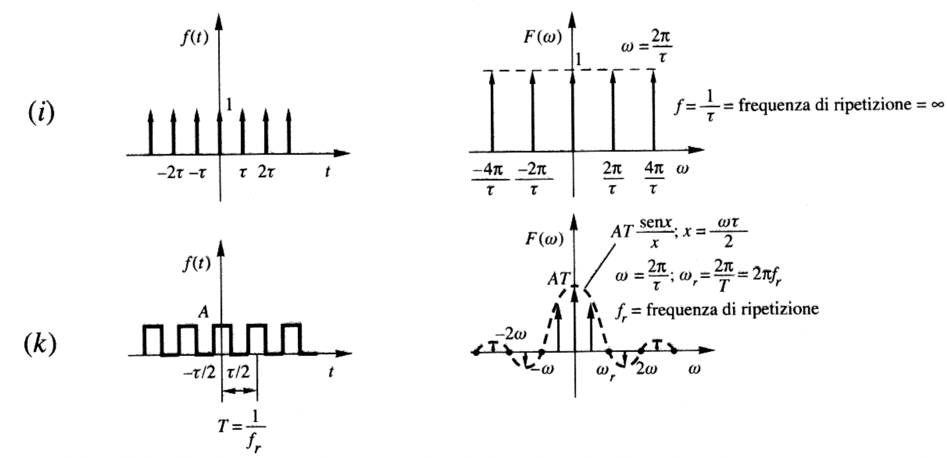


Spettro dell'impulso di Dirac



Rappresentazione di alcuni segnali semplici nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze:

a) Segnale sinusoidale;
b) Continua;
c) Impulso di Dirac;
d) Impulso rettangolare;
e) Impulso di Nyquist;
f) Impulso triangolare;
g) Impulso di Nyquist rialzato;
h) Onda a dente di sega
i) Treno di impulso di Dirac
l) Onda rettangolare



Come si può osservare immediatamente dalla figura, l'impulso di Dirac ha trasformata costante (unitaria) per tutti i valori di ω. Questo significa che l'impulso contiene in sé tutte le possibili frequenze, e tutte con lo stesso peso. Questa sua caratteristica lo rende preziosissimo per lo studio della risposta dei sistemi lineari, come si avrà modo di vedere nel prossimo paragrafo.

10. Considerazioni energetiche

Abbiamo visto al paragrafo 6 che per i segnali periodici vale il teorema di Parseval, che ci permette di calcolate l'energia (o la potenza) del segnale in un periodo come la somma di quelle di tutte le componenti armoniche, con la formula

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left|C_n\right|^2 \tag{10.1}$$

I segnali per i quali si può calcolare la trasformata di Fourier sono di energia, sono cioè tali che la loro energia totale (per t che va da -∞ a +∞) sia finita.
Si può dimostrare che il teorema di Parseval può venir esteso anche alla trasformata, ottenendo

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(\omega)\right|^2 d\omega \tag{10.2}$$

Il termine $\left|F(\omega)\right|^2$ rappresenta una ***densità spettrale*** di energia, ci dice cioè quanta energia si trova nella banda infinitesima di frequenze dω.

11. Proprietà della trasformata di Fourier

La coppia di relazioni 9.2 possono essere viste come un ***operatore trasformata*** (indicato con F) che, applicato ad un segnale nel dominio del tempo, fornisce il suo corrispondente spettro nel dominio della frequenza, ed un ***operatore antitrasformata*** (indicato con F^{-1}) che dato uno spettro nel dominio del tempo restituisce il segnale originale. Questi operatori godono di diverse proprietà molto importanti, delle quali vedremo qui solo le principali.
La prima proprietà che analizziamo è quella di ***linearità***:

$$\mathsf{F}\left[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\right] = k_1 \mathsf{F}\left[f_1(t)\right] + k_2 \mathsf{F}\left[f_2(t)\right] \tag{11.1}$$

che permette di calcolare la trasformata della somma di due segnali come la somma delle corrispondenti trasformate.
Un'altra proprietà molto importante è quella che permette di calcolare la trasformata della derivata di una funzione

$$\mathsf{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega \mathsf{F}\left[f(t)\right] \tag{11.2}$$

semplicemente come la trasformata della funzione stessa moltiplicata per $j\omega$. Da questa si può ricavare immediatamente la trasformata dell'integrale di una funzione come

$$\mathcal{F}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[f(t)] \tag{11.3}$$

Queste ultime due relazioni sono fondamentali perché permettono di sostituire alle equazioni differenziali che descrivono il comportamento di circuiti elettronici con componenti reattivi (condensatori ed induttori) con equazioni algebriche che, pur utilizzando variabili complesse, sono molto più semplici da risolvere.
Un'altra proprietà fondamentale è quella chiamata teorema della convoluzione, che afferma che se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \tag{11.4}$$

allora si può calcolare la trasformata di *y(t)* come

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t)]\cdot\mathcal{F}[h(t)] = X(\omega)\cdot H(\omega) \tag{11.5}$$

definendo il prodotto della 11.4 come la ***convoluzione*** tra *x(t)* ed *h(t)*, la 11.5 afferma che la trasformata di questo segnale non è altro che il prodotto delle trasformate dei due segnali di partenza.

12. La funzione di trasferimento

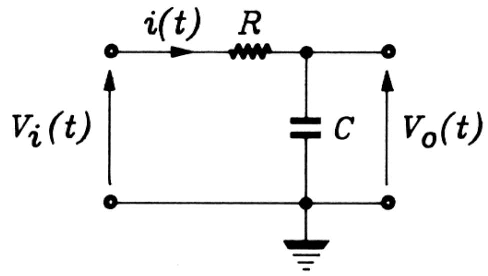
L'importanza del prodotto di convoluzione nello studio dei sistemi lineari è dovuta al fatto che, tramite esso, è possibile determinare la risposta del sistema ad un segnale arbitrario quando sia nota la sua ***risposta impulsiva***, cioè il segnale di uscita che si ottiene applicando all'ingresso un impulso di Dirac. Per vedere come questo sia possibile, consideriamo un generico sistema (tipicamente un circuito lineare), cui sia applicato in ingresso un segnale *x(t)*. Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, come una funzione del tempo possa essere rappresentata mediante la sua trasformata di Fourier, ovvero mediante una somma di infinite componenti sinusoidali. Un circuito lineare modificherà l'ampiezza e la fase di ciascuna di queste componenti sinusoidali, ed inoltre per esso è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Partendo da questi tre concetti fondamentali si può pensare di introdurre un ente matematico che descriva l'azione del circuito su tutte le componenti sinusoidali che riceve in ingresso. Questo ente sarà necessariamente una funzione di ω, e per ogni valore della frequenza ci dirà di quanto viene attenuato (o amplificato) il modulo della sinusoide e di quanto questa viene sfasata. Dovrà essere perciò una funzione complessa. Chiamando $X(\omega)$ la trasformata del segnale di ingresso, ed $Y(\omega)$ quella del segnale di uscita, si avrà

$$Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega) \tag{12.1}$$

dove la funzione $H(\omega)$ prende il nome di ***funzione di trasferimento*** del sistema. Per ogni valore della pulsazione ω si possono trovare il modulo e la fase del segnale di uscita come

$$\begin{cases} |Y(\omega)| = |H(\omega)|\cdot|X(\omega)| \\ \arg[Y(\omega)] = \arg[H(\omega)] + \arg[X(\omega)] \end{cases} \tag{12.2}$$

In pratica la funzione $H(\omega)$ così definita non è altro che il rapporto tra il favore di uscita e quello di ingresso per un generico valore della pulsazione, e può venir determinata mediante gli usuali metodi di analisi circuitale in regime sinusoidale. Ad esempio per il circuito riportato in figura



si può calcolare la funzione di trasferimento che risulta

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{12.3}$$

ottenendo la tensione di uscita dal partitore formato dalla resistenza e dalla reattanza del condensatore. È immediato calcolare il segnale d'uscita conoscendo quello d'ingresso quando si lavora nel dominio della frequenza. Le operazioni di trasformazione tra segnale e spettro sono facilitate da tabelle che raccolgono i casi più frequenti in pratica, e dalle proprietà della trasformata di Fourier che consentono, nella maggior parte dei casi, di trovare la trasformata di un segnale senza dover risolvere gli integrali 4.3 e 9.2.
Volendo invece calcolare l'andamento della tensione d'uscita del partitore RC lavorando direttamente nel dominio del tempo si dovranno utilizzare le relazioni

$$\begin{aligned} &V_R(t) = R \cdot i(t) \\ &i_c(t) = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned} \tag{12.4}$$

e, applicando la legge di Kirchhoff alla maglia, scrivere

$$\begin{cases} V_i(t) = V_R(t) + V_C(t) \\ V_O(t) = V_C(t) \end{cases} \tag{12.5}$$

e quindi

$$V_i(t) = R \cdot i(t) + V_C(t) = RC \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \tag{12.6}$$

il che porta alla relazione finale tra ingresso ed uscita

$$V_i(t) = RC\frac{dV_O(t)}{dt} + V_O(t) \tag{12.7}$$

che come si vede contiene sia l'espressione della tensione d'uscita che la sua derivata prima. Una relazione di questo tipo è detta *equazione differenziale*, ed è lo strumento fondamentale per l'analisi

matematica delle leggi fisiche. Lo studio dei circuiti lineari con parecchi componenti reattivi può portare a equazioni differenziali molto complicate, la cui soluzione può non essere affatto immediata. L'applicazione della trasformata di Fourier consente di trasformare tutte le equazioni differenziali in equazioni algebriche della variabile $j\omega$, la cui soluzione è generalmente più semplice.
A titolo di esempio si noti che applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della 12.7 si ottiene

$$\mathcal{F}[V_i(t)] = \mathcal{F}\left[RC\frac{dV_O(t)}{dt} + V_O(t)\right] = RC \cdot \mathcal{F}\left[\frac{dV_O(t)}{dt}\right] + \mathcal{F}[V_O(t)] \tag{12.8}$$

da cui, applicando la proprietà 11.2 si ricava

$$V_i(\omega) = RC \cdot j\omega V_O(\omega) + V_O(\omega) = (1 + j\omega RC) \cdot V_O(\omega) \tag{12.9}$$

dalla quale si può ricavare la funzione di trasferimento del circuito

$$H(\omega) = \frac{V_O(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{12.10}$$

in accordo con quanto ottenuto con i tradizionali metodi di analisi circuitale utilizzanti i fasori.
La funzione di trasferimento può essere considerata la trasformata di un segnale nel tempo. Questo segnale, che si indica con *h(t)*, prende il nome di ***risposta impulsiva*** del sistema; può infatti venir misurato fisicamente mandando un impulso all'ingresso ed osservando il segnale, nel dominio del tempo, che si ottiene all'uscita. La giustificazione di questa affermazione è immediata se si pensa che la trasformata dell'impulso di Dirac è la costante 1, e che con questo segnale come ingresso la 12.1 afferma che l'uscita del sistema viene ad essere proprio H(ω).

13. Distorsione armonica, di ampiezza e di fase

Con il termine ***distorsione*** viene indicata una qualunque modifica alla forma di un generico segnale. La distorsione viene introdotta dai circuiti attraversati dal segnale stesso; di conseguenza, esiste distorsione ogni volta che non e possibile sovrapporre esattamente il grafico del segnale di uscita con quello dell'ingresso, pur aggiustando adeguatamente le scale dei due dia- grammi ed effettuando eventuali scorrimenti sia sull'asse delle ampiezze che su quello dei tempi. Non risulta quindi distorto un segnale amplificato od attenuato, e neppure uno ritardato nel tempo o a cui venga aggiunto un offset, mentre è evidentemente distorta una forma d'onda sinusoidale che, attraversando un comparatore, diventa un'onda quadra.
La distorsione può essere introdotta a causa di tre diversi fattori:

1) Presenza di non linearità nei circuiti;
2) Variazioni del modulo della funzione di trasferimento;
3) Andamento non lineare della fase della funzione di trasferimento.

Nel primo caso si parla di ***distorsione armonica,*** nel secondo di ***distorsione di ampiezza*** e nel terzo di ***distorsione di fase***. La distorsione armonica ha interesse soltanto per le forme d'onda sinusoidali, dal momento che, in presenza di non linearità, viene a cadere completamente la possibilità di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi di rappresentare matematicamente l'uscita del circuito mediante il metodo degli sviluppi in serie di Fourier. A riprova di questo fatto si pensi ad esempio ad un'onda quadra che attraversa un comparatore non invertente con soglia di riferimento pari a zero (*zero crossing detector*); il segnale d'uscita, in condizioni ideali, risulta non distorto, mentre non si può dire ovviamente la stessa cosa per le sue componenti armoniche. La distorsione armonica consiste dunque nell'aggiunta di componenti armoniche estranee al segnale d'ingresso, il cui spettro è per ipotesi composto da una sola riga alla pulsazione ω_0, (fondamentale). La misura della distorsione fa riferimento ai valori efficaci, ed è normalmente espressa in percentuale. Indicando con V_1 il valore efficace della fondamentale e con V_2, V_3 … V_n quelli della seconda, terza, n-sima armonica, si definisce distorsione di n-sima armonica il rapporto:

$$D_n = \frac{V_1}{V_n} \tag{13.1}$$

Ricordando quanto si è visto con la 6.8, cioè che il valore efficace di un insieme di componenti armoniche è pari alla radice quadrata della sommatoria dei quadrati dei singoli valori efficaci, si può definire anche la ***distorsione armonica totale,*** in sigla ***THD*** (Total Harmonic Distortion), mediante la formula:

$$D = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \ldots + V_n^2}}{V_1} = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \ldots + D_n^2} \tag{13.2}$$

La misura della distorsione armonica avviene mediante un apposito strumento, denominato ***distorsiometro,*** il quale è composto essenzialmente da un filtro notch (elimina banda) sintonizzabile che pilota un voltmetro a valore efficace. Inizialmente si bypassa il filtro, in modo che il voltmetro misuri il valore efficace di tutte le componenti armoniche del segnale, compresa la fondamentale, e in queste condizioni si tara il fondoscala dello strumento. Successivamente si inserisce il filtro e lo si sintonizza alla frequenza della fondamentale: l'indicazione dello strumento costituisce adesso la misura percentuale del valore efficace delle armoniche rispetto a quello dell'intero segnale. Indicando con D_m questa misura, si dimostra facilmente come la THD sia espressa da:

$$D = \frac{D_m}{\sqrt{1 - D_m^2}} \tag{13.3}$$

Nei moderni distorsiometri a indicazione digitale, il calcolo espresso dalla 13.3 è effettuato direttamente dallo strumento, per cui la quantità visualizzata costituisce già la THD.
Le distorsioni di ampiezza e di fase interessano i soli segnali periodici non sinusoidali, in quanto, per le sinusoidi, esse si traducono in semplici variazioni del modulo e dello sfasamento del segnale di uscita, che non risulta quindi distorto. Al contrario di quella armonica, queste distorsioni sono introdotte dai circuiti lineari, e consistono in una alterazione delle ampiezze (o degli sfasamenti) delle singole componenti dello sviluppo di Fourier del segnale in esame. È evidente infatti che se un circuito altera il rapporto relativo esistente fra le ampiezze e le fasi delle armoniche del segnale d'ingresso, quello di uscita, derivante dalla sovrapposizione degli effetti, non potrà costituirne una replica fedele, ma risulterà più o meno modificato nella forma, e quindi distorto. Un circuito non introduce distorsione di ampiezza quando il modulo della sua funzione di trasferimento è costante in tutto l'intervallo di frequenze in cui sono presenti le armoniche del segnale (o quantomeno quelle ritenute significative). Per quanto riguarda la fase, il discorso è leggermente più articolato. Innanzitutto occorre ricordare che lo sfasamento fra due segnali equivale, nel tempo, ad un ritardo o ad un anticipo del primo rispetto al secondo. Questo ritardo può essere facilmente calcolato mediante una semplice proporzione, visto che ad uno sfasamento di 360° corrisponde un intervallo temporale di un periodo. Indicando con β la fase in gradi e con t il tempo in secondi si ha:

$$\frac{\beta}{t} = \frac{360°}{T} \quad da\ cui\ \ t = \frac{\beta}{360°} \cdot T \tag{13.4}$$

La stessa formula può essere riscritta utilizzando i radianti al posto dei gradi, ottenendo:

$$t = \frac{\beta}{2\pi} \cdot T = \frac{\beta}{\omega} = -T_{pd} \tag{13.5}$$

dove β rappresenta la fase in radianti alla pulsazione ω, mentre T_{pd} prende il nome di ***ritardo di fase*** (Phase Delay). Nel caso, ad esempio, di una sinusoide di uscita sfasata di 45° in ritardo rispetto all'ingresso, e ipotizzando una frequenza di lavoro di 1 KHz, si ottiene dalla 13.5 un ritardo di fase pari a:

$$T_{pd} = -\frac{\beta}{\omega} = -\frac{-\pi/4}{2\pi \cdot 10^3} = 125\text{ìs} \tag{13.6}$$

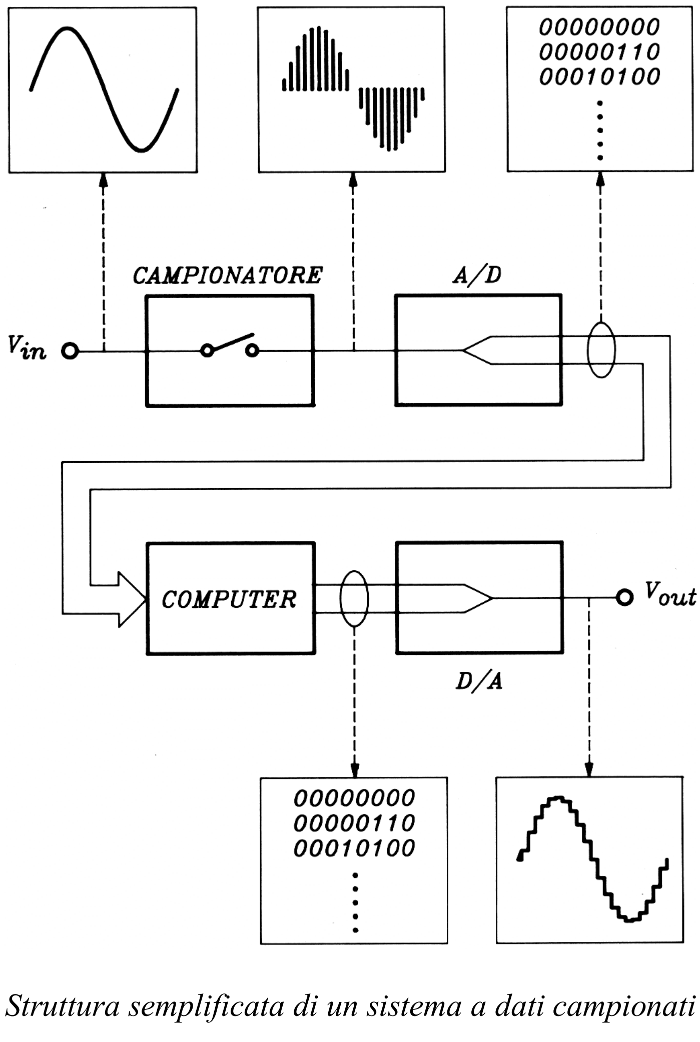
Se il ritardo di fase è variabile con la frequenza, le varie armoniche si presentano in uscita ognuna ritardata di un tempo diverso, ed in questo caso non è più possibile la ricostruzione esatta dell'ingresso. Al fine di evitare la distorsione di fase è quindi necessario che il ritardo di fase si mantenga costante nell'intervallo di frequenze in cui sono presenti le componenti armoniche significative del segnale d'ingresso. In base alla 13.5 è immediato dedurre che questo si verifica se lo sfasamento risulta proporzionale alla pulsazione. Riunendo insieme i risultati relativi al modulo ed alla fase della funzione di trasferimento, si può enunciare la ***condizione di non distorsione,*** la quale afferma che un segnale periodico non sinusoidale attraversa un circuito lineare senza subire distorsioni se il modulo della funzione di trasferimento ed il suo ritardo di fase risultano costanti.
Non tutte le forme d'onda complesse hanno le componenti spettrali collegate fra loro su base armonica, ovvero a frequenza multipla della fondamentale. Si vede ad esempio, studiando la modulazione, come una portante sinusoidale, modulata da un segnale anch'esso sinusoidale, presenti uno spettro formato da tre righe: la prima alla pulsazione ω_p della portante, e le altre due localizzate rispettivamente a ω_p - ω_m e ω_p - ω_m, avendo indicato con ω_m la pulsazione del segnale modulante.
In casi come questo, la condizione sul ritardo di fase costante può essere resa meno severa e più facile da realizzare. Le armoniche del segnale sono infatti raggruppate in un piccolo intervallo di pulsazioni; invece di imporre la proporzionalità in assoluto fra fase e pulsazione, è sufficiente richiedere che si mantenga costante il rapporto fra *incremento di fase* e *incremento di pulsazione.* Il limite, per $\Delta\omega \rightarrow 0$, di questo rapporto, definisce il cosiddetto ***ritardo di gruppo*** (Group Delay). In formule:

$$T_{gd} = -\frac{d\beta}{d\omega} \tag{13.7}$$

Nella propagazione dei segnali il ritardo di gruppo indica il tempo necessario alla propagazione dell'energia, o dell'informazione, dall'ingresso all'uscita del sistema, ed è perciò un indicatore accurato per i ritardi nella propagazione dei segnali.

14. Segnali campionati

Nei paragrafi precedenti sono stati introdotti i principali metodi di analisi idonei allo studio dei segnali a *tempo continuo,* ovvero definiti per ogni valore della variabile reale *t.* Le tecniche studiate sono efficaci nell'analisi e nella sintesi dei circuiti analogici, come ad esempio i filtri, gli amplificatori, gli oscillatori e in genere tutti i circuiti e sistemi in cui abbia significato il livello di una determinata grandezza in ogni istante di tempo. L'elaborazione puramente analogica dei segnali soffre comunque di notevoli limitazioni, riguardanti principalmente il rumore, la variazione dei parametri circuitali nel tempo, l'influenza delle condizioni ambientali. Secondariamente, i circuiti analogici risultano scarsamente flessibili nel funzionamento, visto che sono progettati e realizzati per assolvere una ben precisa funzione, ed inoltre la loro complessità cresce velocemente all'aumentare delle richieste di elaborazione dei segnali (con progressiva diminuzione dell'affidabilità). Per fare fronte a questi problemi, la tendenza è di rivolgersi sempre di più verso l'utilizzo di tecniche digitali di elaborazione, per le quali i problemi di rumore o quelli legati all'influenza ambientale sono praticamente inesistenti. L'elaborazione digitale offre inoltre una straordinaria flessibilità di funzionamento, essendo in genere basata su microprocessori, mentre la complessità dell'hardware è relativamente modesta e soprattutto indipendente dalla natura delle elaborazioni richieste, riversandosi interamente sul software applicativo. I sistemi digitali non sono comunque in grado di elaborare i segnali a tempo continuo, dato che il loro funzionamento è governato da un segnale di clock e quindi ogni operazione può avvenire soltanto ad istanti separati gli uni dagli altri da un intervallo finito di tempo. Come conseguenza, l'acquisizione e la generazione dei segnali avviene a *tempo discreto;* questo significa che l'ingresso viene letto soltanto in determinati istanti, e dunque non è significativo al di fuori di essi, e che l'uscita è allo stesso modo generata in modo *discontinuo,* ovvero è aggiornata anch'essa in istanti separati gli uni dagli altri da periodi di inattività. L'effetto globale di questo modo di operare consiste nel fatto che i segnali continui di ingresso e uscita vengono sostituiti da successioni discrete di valori, i quali prendono il nome di ***campioni,*** da cui il nome di ***sistemi a dati campionati***. La figura seguente mostra uno schema semplificato di un sistema a dati campionati:



Struttura semplificata di un sistema a dati campionati

Il segnale analogico d'ingresso attraversa un primo blocco, denominato ***campionatore***. Nel caso ideale, il campionatore è in grado di «fotografare» istantaneamente il segnale, per cui, alla sua uscita, si avrà l'andamento discreto rappresentato in figura. Il blocco seguente, denominato *A/D* o ADC (*Analog to Digital Converter*), è quello che permette al computer di acquisire, in forma binaria, il valore del campione corrente; anche in questo caso si ipotizza un funzionamento istantaneo del circuito. Da questo punto in avanti, il segnale perde ogni connotazione temporale, trasformandosi in una sequenza di numeri, i quali vengono processati dal computer, in base all'elaborazione che è necessario eseguire. Il risultato di questa elaborazione consiste nuovamente in una sequenza di numeri; per ottenere un segnale di uscita continuo è necessario quindi un ultimo blocco, denominato D/A o DAC (*Digital to Analog Converter*)

15. Teorema del campionamento e struttura effettiva dei sistemi a dati campionati

Si è visto, nel punto precedente, come un sistema a dati campionati consista essenzialmente in un algoritmo che trasforma una sequenza numerica in un'altra sequenza dello stesso tipo. Dal momento però che queste successioni numeriche rappresentano il segnale di ingresso, inizialmente continuo, solo negli istanti di campionamento, viene spontaneo chiedersi quale sia il degrado, a livello di contenuto informativo, che consegue al fatto di ignorare completamente il segnale stesso negli istanti compresi tra un campione ed il successivo.
È abbastanza intuitivo che il segnale campionato rappresenterà tanto meglio quello continuo quanto più fitto sarà il campionamento, cioè quanto più piccolo sarà l'intervallo di tempo tra un campione e l'altro. Per fissare un criterio rigoroso per determinare la minima frequenza di campionamento richiede un risultato noto come ***teorema del campionamento***.
Di questo teorema fondamentale diamo qui solo l'enunciato. Siano *f(t)* un segnale continuo, ed F(ω) la sua corrispondente trasformata di Fourier. Supponiamo ora di campionare *f(t)* con periodo di campionamento T_C, e sia

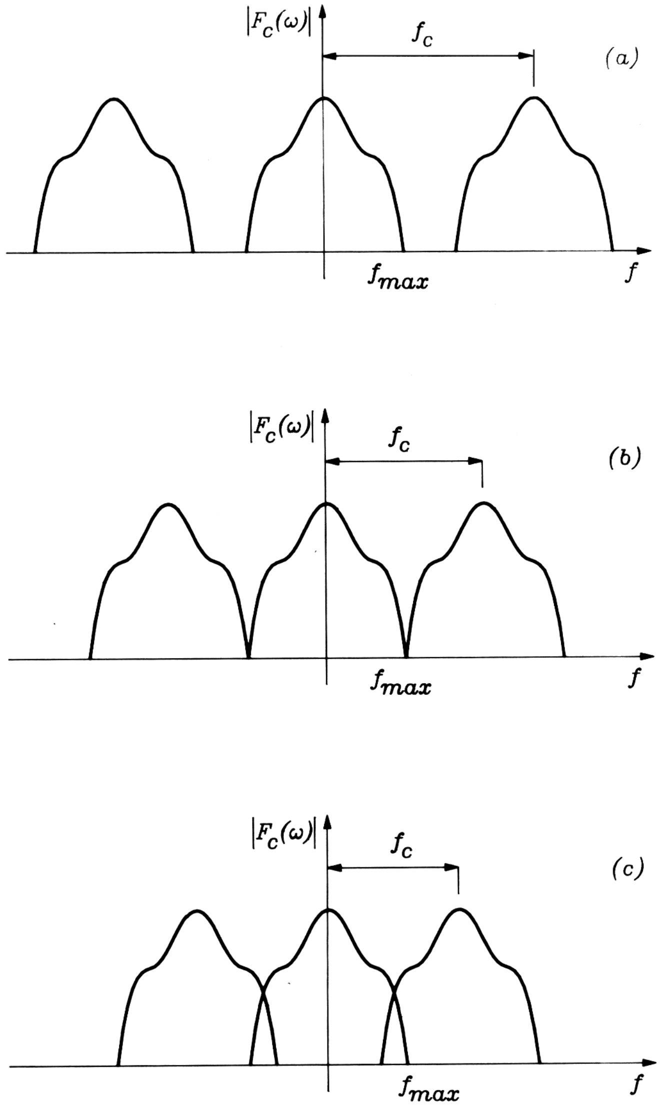
$$\omega_C = \frac{2\pi}{T_C} \qquad (15.1)$$

Il teorema del campionamento afferma che la trasformata $F_C(\omega)$ del segnale campionato è

$$F_C(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\omega - n\omega_C) \qquad (15.2)$$

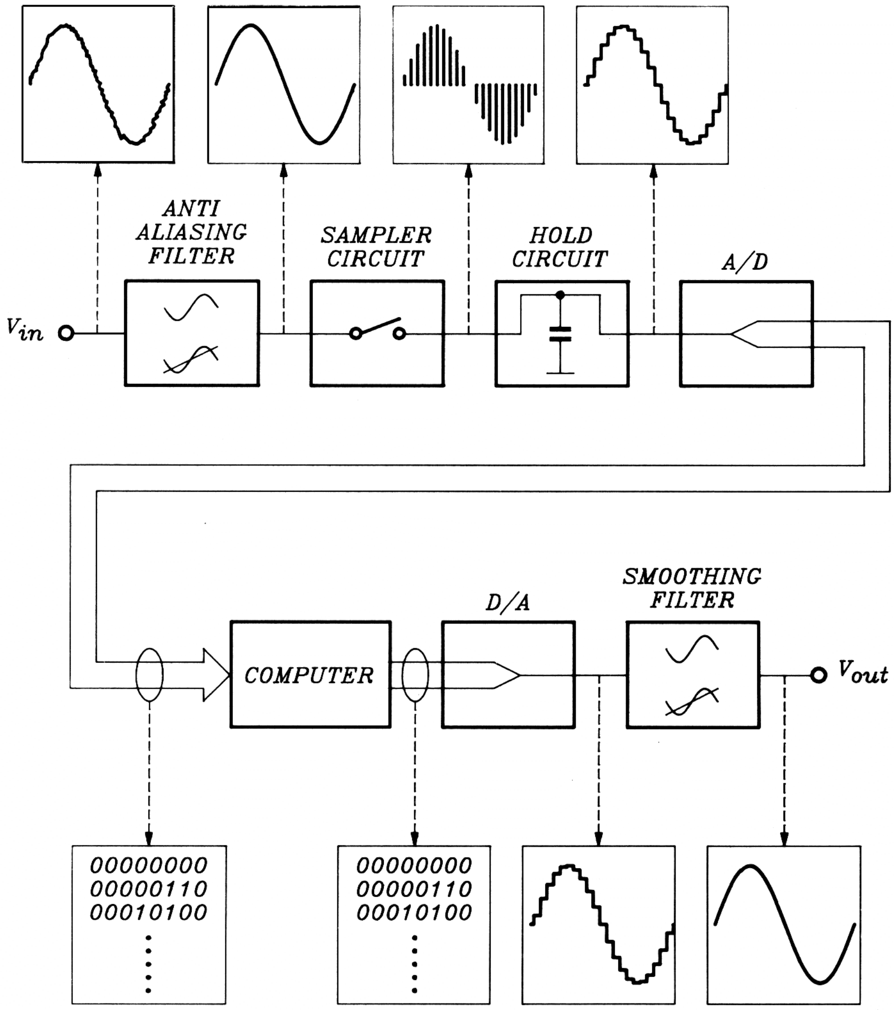
e risulta essere composto da infinite repliche dello spettro del segnale di partenza (dette ***alias***) distanziate tra loro di una quantità pari alla frequenza di campionamento.
La figura alla pagina seguente mostra lo spettro che si ottiene con il campionamento in tre casi, supponendo che il segnale di ingresso sia a ***banda limitata*** cioè privo di componenti spettrali al di sopra di un valore f_{max}. La sezione *(a)* è relativa al caso in cui la frequenza di campionamento f_C è maggiore di 2 f_{max}. In questo caso gli alias sono separati ed è possibile ricostruire il segnale di partenza con un filtro passabasso. La sezione (b) mostra il caso in cui si ha $f_C = 2 f_{max}$. Gli alias sono ancora separati, ma il filtro necessario per isolare solo la prima replica dovrebbe avere pendenza infinita, e quindi non fisicamente realizzabile. Infine la sezione (c) mostra cosa accade quando la frequenza di campionamento è troppo bassa per le caratteristiche spettrali del segnale; come si vede gli alias si sovrappongono e non è più possibile ricostruire esattamente il segnale di partenza, che sarà affetto da una distorsione (detta di ***aliasing***) nella parte alta dello spettro.
Dalle considerazioni precedenti emerge il fondamentale risultato noto come teorema del campionamento (o di Shannon), che afferma che un segnale continuo può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni, a patto che questi ultimi siano prelevati con una frequenza

almeno doppia di quella relativa alla componente armonica di frequenza più elevata presente nel segnale.



Spettro di un segnale dopo il campionamento

Quanto detto finora naturalmente non tiene conto del fatto che i convertitori hanno una precisione limitata, dipendente dal numero di bit con i quali vengono codificati i diversi livelli di tensione. Questa limitazione porta ad una perdita di informazione non recuperabile, che può essere assimilata ad un rumore aggiunto al segnale utile (detto ***rumore di quantizzazione***).
Un sistema reale che voglia elaborare in modo corretto i segnali campionati deve quindi essere più complesso rispetto al modello semplificato visto al paragrafo 14. In particolare sarà indispensabile aggiungere un ***filtro anti aliasing***, un passabasso con il compito di eliminare tutte le componenti armoniche eventualmente presenti a frequenze maggiori della metà della frequenza di campionamento (che spesso ha anche la funzione di filtraggio nei confronti del rumore). Se la frequenza di campionamento è elevata potrebbe essere necessario aggiungere al convertitore A/D un dispositivo ***Sample and Hold*** (S/H) con il compito di mantenere costante il segnale di ingresso al convertitore per il tempo necessario ad effettuare la conversione.
In uscita sarà necessario inserire un ulteriore filtro passabasso (***smoothing filter***) con il compito di eliminare tutte le repliche indesiderate dello spettro; questo equivale, nel dominio del tempo, ad eliminare le "seghettature" del segnale dovute al campionamento.
Uno schema corrispondente a quanto detto sopra si può vedere nella figura alla pagina seguente.



Schema di un sistema a dati campionati reale