MAURIZIO FEDERICI
Centro di studio per le comunicazioni elettriche - Sezione di Milano

La caratteristica di direttività e di impedenza meccanica di sorgenti acustiche cilindriche

ESTRATTO DA: «LA RICERCA SCIENTIFICA»
ANNO 25° - N. 6 - Giugno 1955

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
ROMA

Riassunto: Vengono esaminate le proprietà di irradiazione acustica di un tronco di cilindro vibrante radialmente, viene mostrato che la caratteristica di direttività di tale superficie è esprimibile con un prodotto di due termini, il primo dei quali è una funzione trigonometrica dell'altezza del cilindro e il secondo è una funzione di Bessel del raggio del cilindro e vengono riportati dei diagrammi per il calcolo grafico delle caratteristiche. Viene mostrato inoltre che per sorgenti cilindriche di altezza elevata rispetto alla lunghezza d'onda la impedenza meccanica della sorgente dipende solo dal raggio del cilindro e può essere espressa come un rapporto di due funzioni di Bessel di tale raggio.

Sono state esaminate in un precedente articolo alcune caratteristiche di trasduttori elettroacustici cilindrici in titanato di bario (1).

Qui si vogliono esaminare le caratteristiche più propriamente acustiche di tali trasduttori e precisamente la caratteristica di direttività e la impedenza meccanica dovuta al carico acustico nel caso di vibrazione radiale.

La caratteristica di direttività si può definire come il rapporto fra la pressione sonora in un punto a distanza r dal trasduttore situato su una retta determinata e la pressione sonora in un punto alla stessa distanza situato sulla retta per la quale la pressione è massima.

Assumendo coordinate cilindriche, la direzione della retta può venire individuata dall'angolo θ che essa fa con l'asse z coincidente con l'asse del trasduttore e dall'angolo φ che il piano verticale per cui passa fa con l'asse di riferimento x posto in un piano normale all'asse z [Fig. 1].

Tale caratteristica può essere ottenuta in base alla formula che da la pressione generata da una sorgente formata da un segmento di superficie cilindrica di larghezza angolare 2α e di altezza $2z$ posta su un cilindro di raggio a.

La formula da impiegare è quella che da la pressione sonora nei punti di un piano verticale passante per l'asse

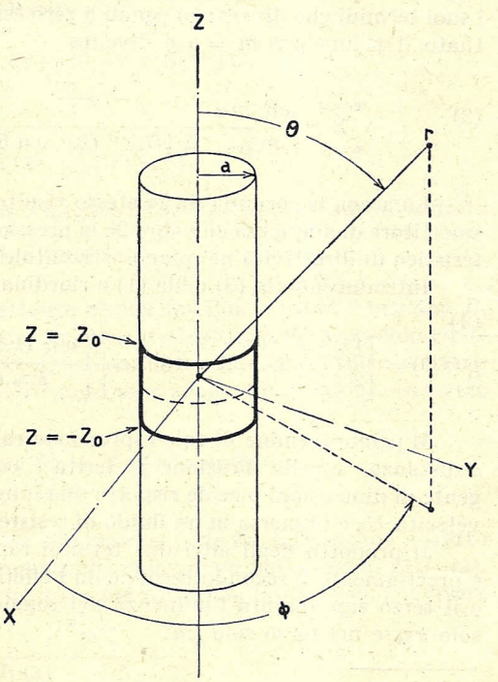

FIG. 1.

(1) « Alta frequenza », **24**, 6, (1955).

del cilindro e per il centro della sorgente. In verità due sono le formule nel caso precedente, una che da la pressione sonora pel semipiano posto anteriormente alla sorgente ($\varphi = o$) ed una che da la pressione sonora pel semipiano posto dietro al cilindro rispetto alla sorgente ($\varphi = \pi$).

$$(1) \quad p(r,\theta,0) = \frac{4\rho c\ U_0}{\pi^2}\ \frac{e^{j(kr-wt)}}{r}\ \frac{\operatorname{sen}(Kz_0\cos\theta)}{k\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\ \sum_{m=o}^{m=\infty}\ \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{m\varepsilon_m}\ \frac{e^{-j\frac{m\pi}{2}}}{\Delta[H_m^{(1)}(ka\operatorname{sen}\theta)]}$$

$$(2) \quad p(r,\theta,\pi) = \frac{4\rho c\ U_0}{\pi^2}\ \frac{e^{j(kr-wt)}}{r}\ \frac{\operatorname{sen}(kz_0\cos\theta)}{k\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\ \sum_{m=o}^{m=\infty}\ \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{m\varepsilon_m}\ \frac{e^{-jm\frac{\pi}{2}}}{\Delta[H_m^{(1)}(Ka\operatorname{sen}\theta)]}\ (-1)^m$$

dove $\varepsilon_m = 2$ per $m = o$, $\varepsilon_m = 1$ per $m \neq o$, Δ è il segno di derivata rispetto all'argomento e H_m (1) è la funzione di Hankel di prima specie e di ordine m, U_0 la velocità di vibrazione della superficie del tubo, ρc la resistenza acustica del fluido in cui il tubo è immerso, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ essendo λ la lunghezza d'onda del suono nel fluido (2).

Per adattare tali formule al caso di un cilindro di titanato di bario che vibra radialmente su tutta la circonferenza è necessario introdurre un valore di ampiezza angolare della sorgente $2\alpha = 2\pi$. In tal caso il termine sotto sommatoria perde tutti i suoi termini che diventano eguali a zero essendo $m\alpha$ sempre multiplo di 2π, eccettuato il primo per $m = o$ e diventa

$$(3) \quad \sum_{m=o}^{m=\infty}\ \frac{\operatorname{sen} m\alpha}{m\varepsilon_m}\ \frac{e^{-jm\frac{\pi}{2}}}{\Delta[H_m^{(1)}(ka\operatorname{sen}\theta)]} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{\Delta[H_0^{(1)}(ka\operatorname{sen}\theta]}$$

La seconda formula da lo stesso risultato confermando che nel caso di un trasmettitore di ampiezza angolare 2π la pressione sonora non dipende più da φ, la caratteristica di direttività nel piano orizzontale è un cerchio.

Introducendo la (3) nella (1) e riordinando i termini si ha

$$(4) \quad p(r,\theta) = \left[\frac{U_0\,\rho\,c}{2\,j\,\lambda\,r}\ e^{j(kr-wt)}\cdot 2\pi a\cdot 2z_0\right]\left[\frac{\operatorname{sen}(kz_0\cos\theta)}{kz_0\cos\theta}\right]\left[\frac{2j}{\pi}\ \frac{1}{ka\operatorname{sen}\theta\cdot\Delta[H_0^{(1)}(ka\operatorname{sen}\theta)]}\right]$$

Il primo termine di tale espressione rappresenta la pressione sonora prodotta a distanza r e nella direzione preferita e coincide con quella prodotta da una sorgente di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda avente superficie $2\pi a\cdot 2z_0$, velocità U_0 e immersa in un fluido di resistenza ρc (3).

Il prodotto degli altri due termini rappresenta la caratteristica di direttività e precisamente il secondo termine da l'effetto dello sviluppo verticale della sorgente e il terzo rappresenta l'influenza del raggio. Infatti nel secondo termine compare solo kz_0 e nel terzo solo ka.

---

(2) LAIRD and COHEN, *Directionality Patterns for Acoustic Radiation from a source on a Rigid Cylinder* J.A.S.A., **44**, 46, (1952).

(3) BERANEK, *Acoustics*, pag. 93 formula 4.3.

Il secondo termine può essere valutato senz'altro e coincide con la caratteristica di direttività di un segmento di lunghezza $2z_0$.

Il terzo termine può essere ulteriormente sviluppato ricordando che (4)

$$\Delta\ ]H_0^{(1)}(x)] = -H_1^{(1)}(x) \tag{5}$$

e cioè la derivata della funzione di Hankel di prima specie di ordine zero è la funzione di Hankel di prima specie di ordine uno col segno cambiato.

Si ha quindi indicando con R_1 e R_2 le due caratteristiche di direttività

$$R_1 = \frac{\operatorname{sen}(kz_0 \cos\theta)}{kz_0 \cos\theta} \tag{6}$$

$$R_2 = \frac{-2j}{\pi} \frac{1}{ka \operatorname{sen}\theta \cdot H_1^{(1)}(ka \operatorname{sen}\theta)} \tag{7}$$

Dato che il terzo termine è un numero complesso, la caratteristica può essere meglio espressa dal suo modulo e quindi in definitiva la caratteristica di direttività totale sarà:

$$R = R_1 R_2 = \left| \frac{\operatorname{sen}(kz_0 \cos\theta)}{kz_0 \cos\theta} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{ka \operatorname{sen}\theta \cdot H_1^{(1)}(ka \operatorname{sen}\theta)} \right| \tag{8}$$

La caratteristica R_2 tende all'unita per $ka \operatorname{sen}\theta \to o$.

Infatti il denominatore si può scrivere

$$ka \operatorname{sen}\theta \cdot H_1^{(1)}(ka \operatorname{sen}\theta) = x H_1^{(1)}(x) \tag{9}$$

con $x = ka \operatorname{sen}\theta$ e quindi

$$x H_1^{(1)} = x J_1(x) + j x N_1(x) \tag{10}$$

Ma il termine $J_1(x)$ per $x \to o$ tende a O mentre il termine $N_1(x)$ tende all'infinito ma con legge tale che il prodotto $N(x) \cdot x$ tende a $\frac{2}{\pi}$.

Per $x \to o$ si ha quindi $R_2 = 1$.

Per $z_0 \to o$, cioè per un cerchio emettente di piccolissima altezza il termine R_1 tende all'unità e R_2 esprime da solo la caratteristica di direttività di un cerchio emittente posto su un cilindro infinito rigido. È interessante confrontare tale caratteristica con quella di un cerchio vibrante radialmente nello spazio libero che è noto essere

$$R_3 = J_0\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta\right) = J_0(ka \operatorname{sen}\theta) \tag{11}$$

Le due caratteristiche sono state tracciate insieme nella fig. 2, la prima a tratto continuo e la seconda tratteggiata e si noterà che coincidono nei massimi di $J_0(x)$.

La ragione di tale coincidenza va ricercata nel fatto che la (7) si può scrivere

$$R_2 = \left| \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1(x) + j N_1(x)} \right| \tag{12}$$

(4) JAHNKE und EMDE, *Funktionentafeln*, pag. 145.

Nei punti nei quali $J_0\ (x)$ è massimo, $g_1\ (x)$ è nullo dato che

(13) $$J'_0\ (x) = -\ J_1\ (x)$$

e quindi la R_2 si riduce a

(14) $$R_{2m} = \left| \frac{2}{\pi x} \frac{1}{j N_1\ (x)} \right|$$

Ma siccome sussiste l'eguaglianza

(15) $$N_0\ (x)\ J_1\ (x) - N_1\ (x) = \frac{2}{\pi x}$$

nel caso specifico in cui $J_1\ (x)$ è zero si ha

(16) $$J_0\ (x) = \frac{2}{\pi x\ N_1 (x)}$$

e quindi

$$R_{2m} = |\ (J_0\ (x)\ |$$

che conferma l'esattezza della rappresentazione grafica. La presenza del cilindro rigido lascia l'andamento generale della curva ma toglie i massimi netti.

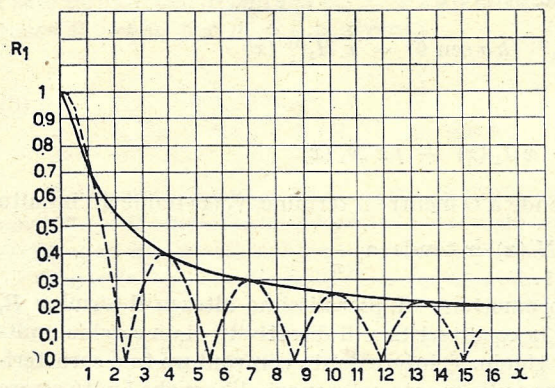

FIG. 2.

La formula (8) può essere utilmente impiegataper determinare la caratteristica di direttività di cilindri in titanato di bario. La caratteristica di direttività di un tale cilindro di raggio a e di altezza $2\ z_0$ è rappresentata esattamento dalla formula (8) purché il cilindro sia prolungato nella parte superiore e inferiore da un cilindro di eguale diametro di materiale riflettente e che non vibra. Questa limitazione è analoga a quella che si fa normalmente con i pistoni vibranti il cui diagramma di irradiazione è calcolabile con note formule solo se il pistone è disposto in un foro posto in una parete rigida. In effetto le formule sono valide in modo approssimato anche per cilindro libero di altezza elevata rispetto alla lunghezza d'onda. La caratteristica di direttività nello spazio è quindi rappresentabile con una superficie di rivoluzione intorno all'asse del cilindro.

Per rendere più facile il calcolo di R sono state tracciate le curve riportate nelle figg. 3 e 4.

Nella fig. 3 il diagramma inferiore ha come ordinata il valore di $\frac{z_0}{\lambda}$, cioè il rapporto fra la semialtezza della sorgente e la lunghezza d'onda. In funzione di tale parametro le rette danno il valore di $k z_0 \cos\theta$ per i diversi valori di θ scritti sulle rette stesse. Se si risale con il valore di ascissa $kz_0 \cos\theta$ trovato alla curva del diagram-

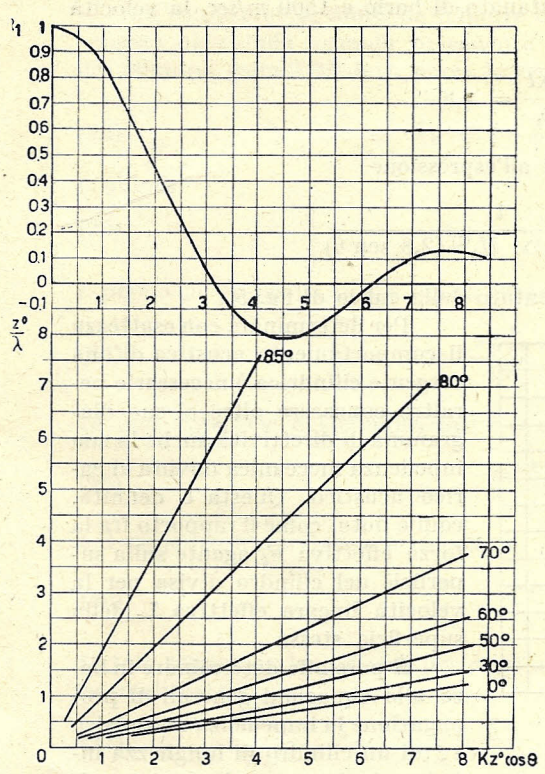

FIG. 3.

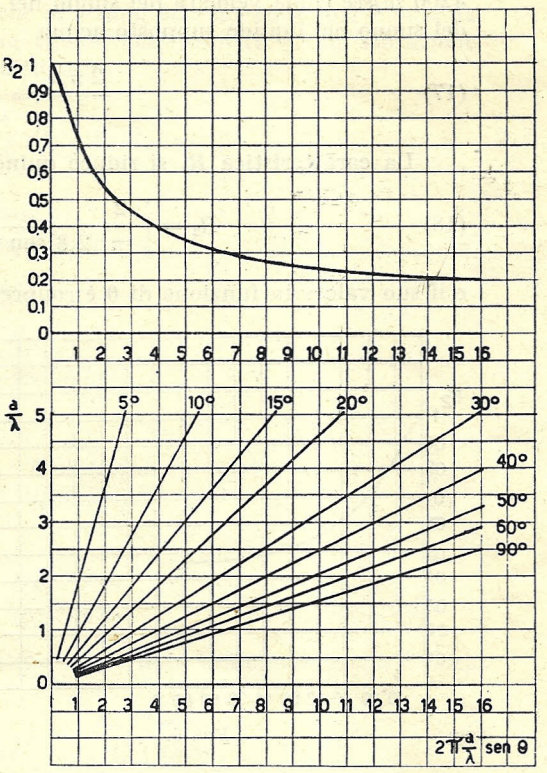

FIG. 4.

ma superiore, questo da in ordinata in corrispondenza di tale valore, il valore di R_1. Tali curve coincidono con quelle che danno la direttività di una sorgente lineare.

Nella fig. 4 il diagramma inferiore ha come ordinata il valore di $\frac{a}{\lambda}$ cioè il rapporto fra il raggio del cilindro e la lunghezza d'onda. In funzione di tale parametro le rette danno il valore di $2\pi\frac{a}{\lambda}$ sen θ per i diversi valori di θ indicati sulle rette stesse. Se si risale con tale valore di acissa alla curva del diagramma superiore, si trova come ordinata il valore di R_2. Il prodotto $R_1 R_2$ da la caratteristica di direttività del cilindro.

Una curva speciale si può tracciare per il caso comune in cui il cilindro di titanato di bario è impiegato per ricevere od emettere ultrasuoni alla sua frequenza di risonanza. Infatti la frequenza di risonanza di un cilindro di titanato di bario è quella per la quale la sua circonferenza media è uguale alla lunghezza d'onda λ_t quindi

$$2\pi a = \lambda_t \tag{16}$$

mentre la lunghezza d'onda nel liquido è evidentemente λ. Si ha quindi assumendo

4200 *m/sec* come velocità del suono nel titanato di bario e 1500 *m/sec.* la velocità del suono nel liquido supposto acqua

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{\lambda t}{\lambda} = 2{,}8 \tag{17}$$

La caratteristica R_2 si riduce quindi all'espressione

$$R_2 = \left| \frac{2}{\pi} \frac{1}{2{,}8 \operatorname{sen}\theta \times H_1^{(1)}(2{,}8 \operatorname{sen}\theta)} \right| \tag{18}$$

e il suo valore in funzione di θ è rappresentato dalla curva di fig. 5.

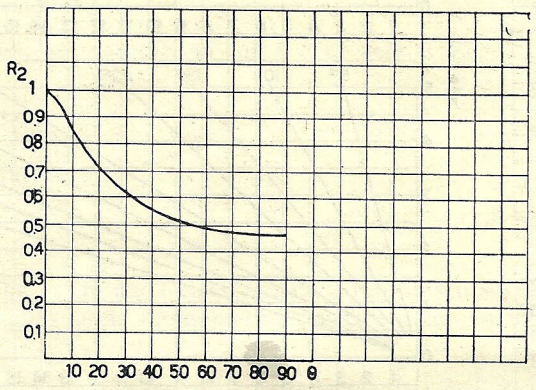

FIG. 5.

Per determinare con esattezza il comportamento acustico di una sorgente cilindrica è necessario peraltro conoscere oltre al suo diagramma di direttività anche la sua inpedenza meccanica dovuta al carico acustico. Questa è definita, com'è noto, come il rapporto fra la forza effettiva F_t agente sulla superficie del cilindro divisa per la velocità lineare effettiva ξ_0 della superficie stessa.

È possibile determinare in base alle equazioni generali di propagazione la impedenza meccanica z_m di un cilindro di lunghezza infinita, o almeno molto elevata rispetto alla lunghezza d'onda. In tale ipotesi infatti la pressione è costante su tutti i punti del cilindro e indicando questa con p e con $\dot{\xi}_0$ la velocità di vibrazione radiale del cilindro si ha

$$z_m = \frac{F_t}{\dot{\xi}_0} = \frac{2\pi a \cdot 2 z_0 \cdot p}{\dot{\xi}_0} \tag{19}$$

Per conoscere z_m basta quindi determinare il rapporto fra p e $\dot{\xi}_0$.

Ora se il cilindro è molto lungo, la pressione sonora a distanza r dall'asse del cilindro è data dalla soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche nel caso di simmetria radiale:

$$p = A\,[J_0(kr) + j\,N_0(kr)] = A\,H_0^{(1)}(kr) \tag{20}$$

dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e J_0 ed N_0 sono rispettivamente la funzione di Bessel e quella di Neumann di ordine zero, e $H_0^{(1)}$ la funzione di Hankel di prima specie di ordine zero.

La velocità radiale in ogni punto è [5]

$$u = \frac{1}{j\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Ak}{j\omega\rho}\Delta\,[H_0^{(1)}(kr)] = -\frac{Ak}{j\omega\rho}H_1^{(1)}(kr) \tag{21}$$

---

[5] MORSE, *Vibration and Sound*, pag. 295.

La condizione ai limiti da imporre è che alla superficie del tubo, per $r = a$, la velocità data dalla formula precedente sia eguale alla velocità $\dot{\xi}_0$ di vibrazione del cilindro, quindi si deve porre la condizione.

$$\dot{\xi}_0 = -\frac{A\,k}{j\,\omega\,\rho}\,H_1^{(1)}\,(k\,a) \tag{22}$$

e quindi

$$A = \frac{\omega\,\rho\,\dot{\xi}_0}{j\,k\,H_1^{(1)}\,(k\,a)} \tag{23}$$

e perciò la pressione in un punto di raggio r è

$$p = \frac{\omega\,\rho\,\dot{\xi}_0}{j\,k}\,\frac{H_0^{(1)}\,(k\,r)}{H_1^{(1)}\,(k\,a)} \tag{24}$$

ed alla superficie del cilindro per $r = a$

$$p_0 = \frac{\omega\,\rho\,\dot{\xi}_0}{j\,k}\,\frac{H_0^{(1)}\,(k\,a)}{H_1^{(1)}\,(k\,a)} \tag{25}$$

e il rapporto fra pressione e velocità è

$$\frac{p}{\dot{\xi}_0} = \frac{\omega\,\rho}{j\,k}\,\frac{H_0^{(1)}\,(k\,a)}{H_1^{(1)}\,(k\,a)} \tag{26}$$

se tale rapporto viene diviso per $\rho\,c$ si ottiene com'è noto la impedenza meccanica normalizzata.

$$z_{nN} = \frac{z_m}{2\,\pi\,a \cdot 2\,z_0 \cdot \rho\,c} = \frac{H_0^{(1)}\,(k\,a)}{j\,H_1^{(1)}\,(k\,a)} \tag{27}$$

Il valore di z_{nN} è rappresentato nella fig. 6 in funzione di $k\,a$ in modulo e in fase. Si vede chiaramente che per valori di raggio piccoli la impedenza meccanica nor-

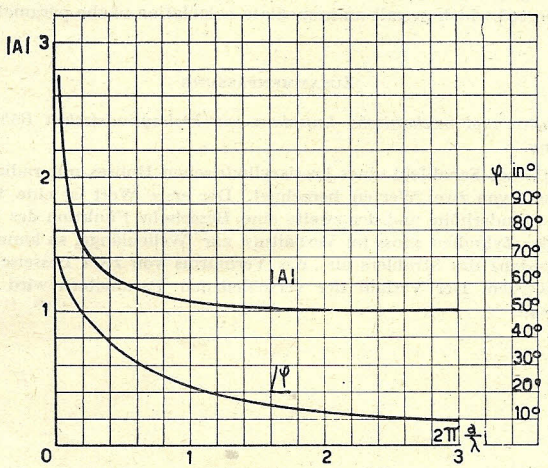

FIG. 6.

malizzata aumenta fino a tendere a valori infiniti, analogamente a quanto avviene per una sorgente puntiforme, ma allo stesso tempo la sua fase si avvicina a 90°

cioè la impedenza divien una pura resistenza di massa. Col crescere di a la impedenza normalizzata tende verso il valore 1 e la sua fase verso il valore O cioè la resistenza tende verso la resistenza acustica specifica del liquido moltiplicato per la superficie come in tutte le sorgenti di grande superficie. Per un cilindro di titanato di bario che vibra alla sua frequenza di risonanza radiale ($\frac{2\pi a}{\lambda} = 2.8$) la resistenza è già praticamente 1 e l'angolo di fase circa 10°

Mi è grato rivolgere i più vivi ringraziamenti al prof. Vecchiacchi, Direttore del Centro, per il suo costante incoraggiamento e i suoi preziosi consigli.

Milano 20 gennaio 1955.

RÉSUMÉ

La caractéristique de directivité et l'impedance mécanique d'une source acoustique cylindrique.

On examine les propriétés de rayonnement acoustique d'un cylindre à vibration radiale et on montre que sa caractéristique de directivité est donnée par le produit de deux termes, dont l'un est une fonction trigonométrique de la hauteur du cylindre et l'autre est une fonction de Bessel du rayon du cylindre. On déduit aussi l'impedance mécanique de la source cylindrique dans le cas où sa hauteur est élevée par rapport à la longueur d'onde et peut-être exprimée comme un rapport de deux fonctions de Bessel. Des diagrammes permettent le calcul graphique immédiat des caractéristiques.

SUMMARY

Directional characteristics and mechanical impedance of a cylindrical source with radial vibration.

The A. examines the acoustical radiation field of a cylinder with radial vibration and shows that its directional characteristic can be expressed as a product of two terms, the first of which is a trigonometrical function of the height of the cylinder and the second is a Bessel function of the radius of the cylinder. The mechanical impedance of the source is also examined and it is shown that when the ratio of the height of the cylinder to the wavelength is high the mechanical impedance is given by the ratio of two Bessel functions. Curves are reported which permit an immediate calculation of the parameters involved.

ZUSAMMENFASSUNG

Richteigeneschaften und mechanische Impedanz von kreiszylindrischen Röhren mit radialer Schwingung.

Das akustisches Schallfeld eines kresiszylindrischen Rohres mit radialer Schwingung wird als Produkt von zwei Werten berechnet. Der erste Wert ist eine trigonometrische Funktion der Zilinderhöhe und der zweite eine Besselsche Funktion des Zylindersradius. Ist die Höhe des Zylinders gross im Verhältnis zur Wellenlänge, so kann auch die mechanische Impedanz des Strahlers als das Verhältnis von zwei Besselschen Funktionen ausgedrückt werden. Der Verlauf der verschiedenen Parametern wird berechnet und graphisch gezeigt.