

## CAPITOLO 8

### CORRELAZIONE ED ANALISI FREQUENZIALE

#### 8.1 IN GENERALE SULLA CORRELAZIONE E L'ANALISI FREQUENZIALE

##### 8.1.1. CORRELAZIONE ED ANALISI DELLO SPETTRO DI FREQUENZA SECONDO WIENER

Abbiamo avuto modo di vedere nel paragrafo 1.4.6 del capitolo 1 che esiste un legame stretto tra la funzione di correlazione e la funzione di densità spettrale di potenza dei segnali correlati.

Le due funzioni sono infatti l'una la trasformata di Fourier dell'altra secondo il coseno:

$$G(W) = (1/3.14) \int_0^{\infty} C(r) \text{Cos } Wr \text{ dr}$$

Ciò suggerisce naturalmente, una volta misurata la funzione di correlazione  $C(r)$ , per un considerevole numero di passi di  $r$ , di tentare un'analisi dello spettro di potenza del segnale correlato; analisi approssimativa, ma pur sempre indicativa della distribuzione frequenziale del segnale.

##### 8.1.2 CORRELAZIONE ED ANALISI DELLA FREQUENZA DI UN SEGNALE MONOCROMATICO STAZIONARIO

Il problema dell'analisi della frequenza di un segnale monocromatico stazionario, del quale si sia misurata la funzione di correlazione, è più semplice del precedente che ha come obiettivo l'analisi dello spettro di un segnale a banda larga.

Anche in questo caso la bontà della soluzione dipenderà dal numero dei passi di ritardo  $r$  con il quale viene rilevata la  $C(r)$ ; più elevato sarà il

numero dei passi, più precisa potrà essere l'analisi frequenziale del segnale.

### 8.1.3 CORRELAZIONE ED ANALISI DELLA FREQUENZA DI UN SEGNALE MONOCROMATICO IMPULSIVO

In questo particolare caso di correlazione e analisi frequenziale nell'ambito di un singolo impulso monocromatico il problema assume un duplice aspetto:

A) Si deve realizzare un correlatore, un pò diverso da quelli già visti nel capitolo 2, in grado di poter elaborare un segnale di breve durata temporale.

B) Si devono adottare particolari metodi di analisi frequenziale che non possono rientrare nè tra quelli del paragrafo 8.1.1, nè tra quelli del paragrafo 8.1.2.

Vedremo in dettaglio questa interessante problematica nel prosieguo di questo capitolo.

## 8.2 LA DETERMINAZIONE DELLO SPETTRO DEL SEGNALE A BANDA LARGA

La determinazione dello spettro del segnale a banda larga, di cui si sia misurata la funzione di correlazione  $C(r)$ , richiede la soluzione dell'integrale :

$$G(W) = (1/3.14) \int_0^{\infty} C(r) \text{Cos } Wr \text{ dr}$$

dove non sempre si conosce la legge matematica che governa  $C(r)$ , ma di questa funzione si hanno soltanto un certo numero di valori in dipendenza di  $r$ .

Un metodo che alcune volte può essere applicato, vedi Rif.bibliografico n.12, è un misto tra l'analitico e il grafico; si tratta cioè di tracciare il grafico della  $C(r)$ , con il maggior numero dei punti di  $r$  possibili, e quindi trovare una funzione matematica che più si approssima alla  $C(r)$ .

La bontà dell'approssimazione si valuta poi sovrapponendo al tracciato della  $C(r)$  la funzione matematica calcolata; è chiaro che non sarà possibile trovare una coincidenza perfetta, ci si dovrà accontentare di una ragionevole approssimazione tanto più che la conoscenza finale di  $G(W)$  mira ad inquadrare genericamente le caratteristiche frequenziali del segnale.

Una volta determinata la funzione sostitutiva di  $C(r)$ , che definiremo come  $C(r)^*$ , andremo a risolvere per via analitica la trasformata di Fourier, ricavando infine la funzione approssimata di  $G(W)$ . Il seguente esempio mostrerà un caso particolare di questa inconsueta procedura d'analisi:

Supponiamo di aver misurato la  $C(r)$  (autocorrelazione) di un segnale a banda larga di cui non conosciamo la funzione di densità spettrale  $G(W)$ . I dati normalizzati ricavati dalle misure sono riportati nella tabella seguente:

r microsec.	C(r)
0	1
20	0.98
40	0.88
60	0.70
80	0.45
100	0.20
120	0.10
140	-0.01
160	-0.07
180	-0.02
200	0

In base alla tabella riportiamo nel grafico di figura 8.1 la serie dei valori misurati raccordandoli manualmente:

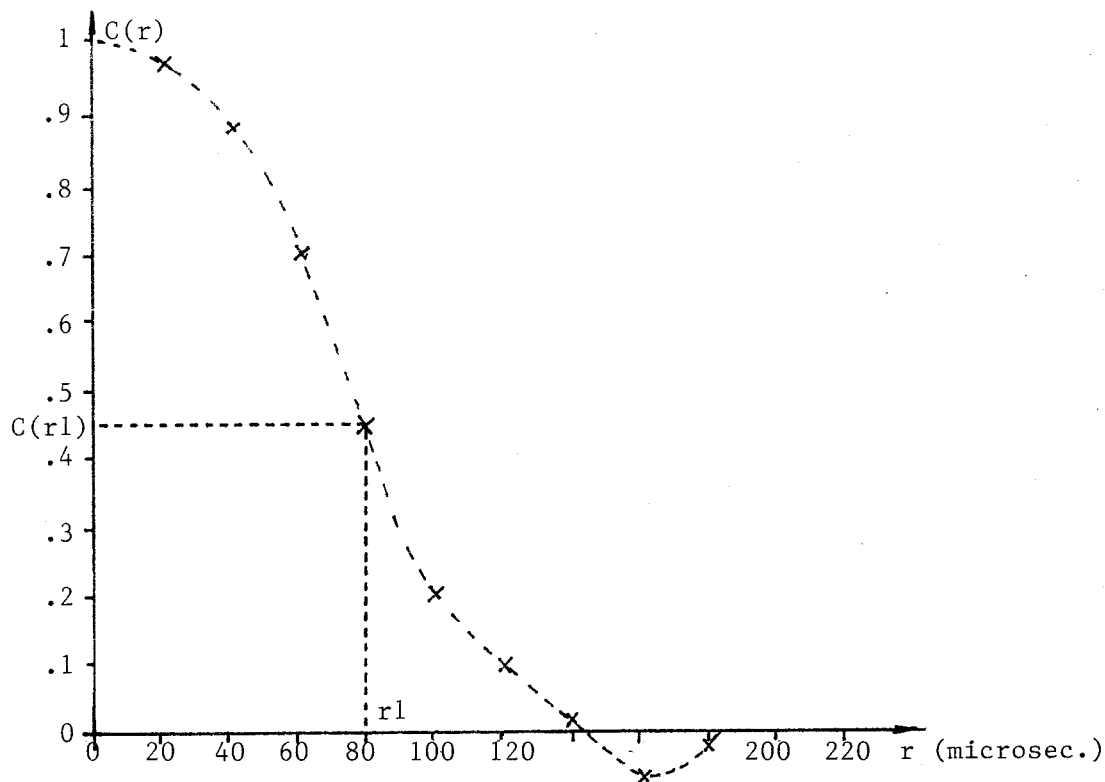


Figura 8.1 Grafico dei valori  $C(r)$  misurati

Dall'osservazione del profilo di raccordo della parte più significativa della curva vediamo che essa ha un andamento a campana caratteristico delle funzioni gaussiane, per cui viene spontaneo tentare la determinazione del parametro esponenziale di una gaussiana per approssimare la  $C(r)$ .

La funzione di cui abbiamo bisogno è definita dall'espressione

$$y(x) = \exp(-a x^2) \quad 8.1)$$

in cui il parametro ( $a$ ) si deve ricavare da due coppie di valori  $r$  e  $C(r)$  dal grafico di figura 8.1.

I valori si sceglieranno nella zona mediana del tracciato della  $C(r)$ ;

una coppia del tipo  $r_1$  ;  $C(r_1)$  ).

Possiamo intanto costruire la funzione gaussiana determinandone il valore di  $(a)$  in dipendenza di  $r$  e  $C(r)$  partendo da:

$$y(x) = \exp ( - a x^2 )$$

che nel nostro caso deve diventare:

$$y(r) = C(r)^* = \exp ( - a r^2 )$$

questa funzione nei punti  $r_1$  e  $C(r_1)$  sarà:

$$C(r_1) = \exp ( - a r_1^2 ) \text{ da cui :}$$

$$a r_1^2 = \ln [1/C(r_1)] \quad \text{cioè } a = [ 1/(r_1)^2 ] \ln [1/C(r_1)]$$

perciò si avrà infine :

$$y(r) = \exp \left[ \left( - \frac{1}{r_1^2} \ln \frac{1}{C(r_1)} \right) r^2 \right] \quad 8.2)$$

ora scelti i valori  $r_1 = 80$  microsecondi e  $C(r_1) = 0.45$  possiamo determinare il valore di  $(a)$  :

$$(a) = \frac{1}{(80 \text{ microsec.})^2} \ln \frac{1}{0.45} = 1.247 \cdot 10^8$$

e quindi scrivere in base alla 8.2) la gaussiana che deve approssimare la nostra  $C(r)$ :

$$y(r) = \exp( - a r^2 ) = \exp ( -1.247 \cdot 10^{-4} r^2 )$$

con  $r$  espresso in microsecondi.

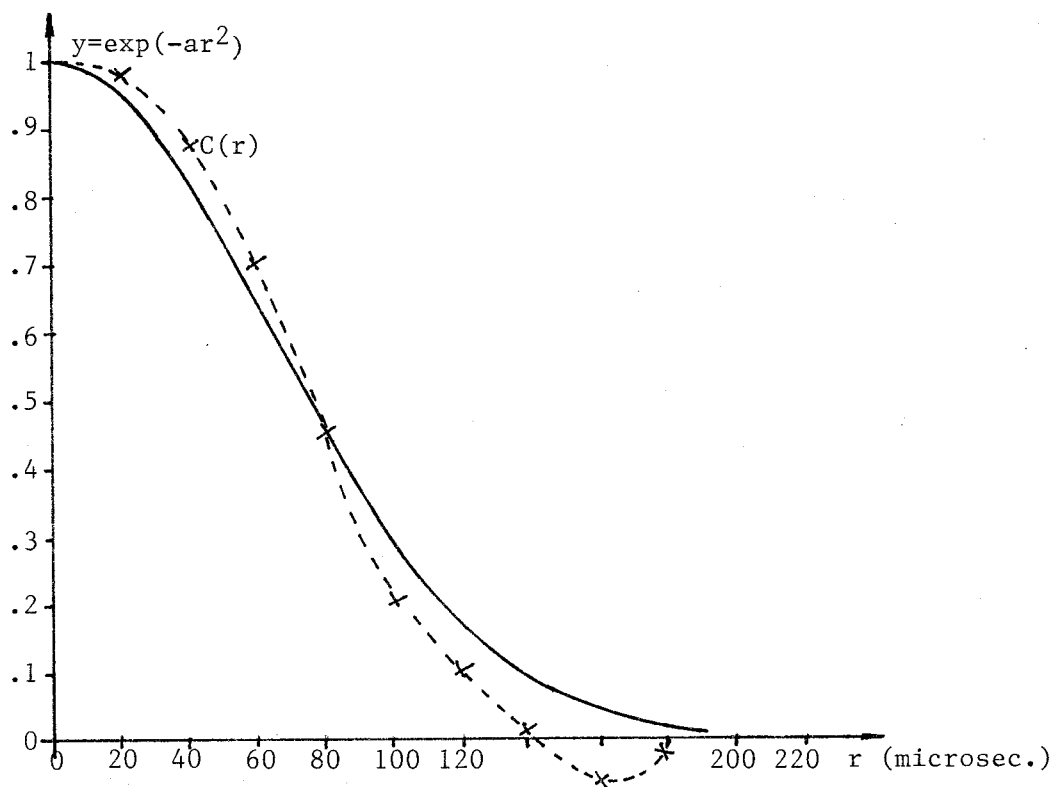


Figura 8.2 Confronto tra  $C(r)$  e  $y(r)$

In figura 8.2 è mostrata la curva di  $y(r)$  sovrapposta alla tratteggiata  $C(r)$  di figura 8.1.

Si può constatare che, almeno nella zona dove la  $C(r)$  è più significativa, la  $y(r)$  approssima ragionevolmente i valori misurati.

A questo punto non resta che calcolare la trasformata di Fourier della  $y(r)$  per ottenere, con approssimazione, la  $G(W)$ .

La trasformazione analitica, data la caratteristica della funzione gaussiana, vedi Rif.bibliografico n.18, che altro non è che una funzione esponenziale, si ottiene semplicemente dalla relazione normalizzata:

$$\exp(-ar^2) \Leftrightarrow \exp(-W^2/4a)$$

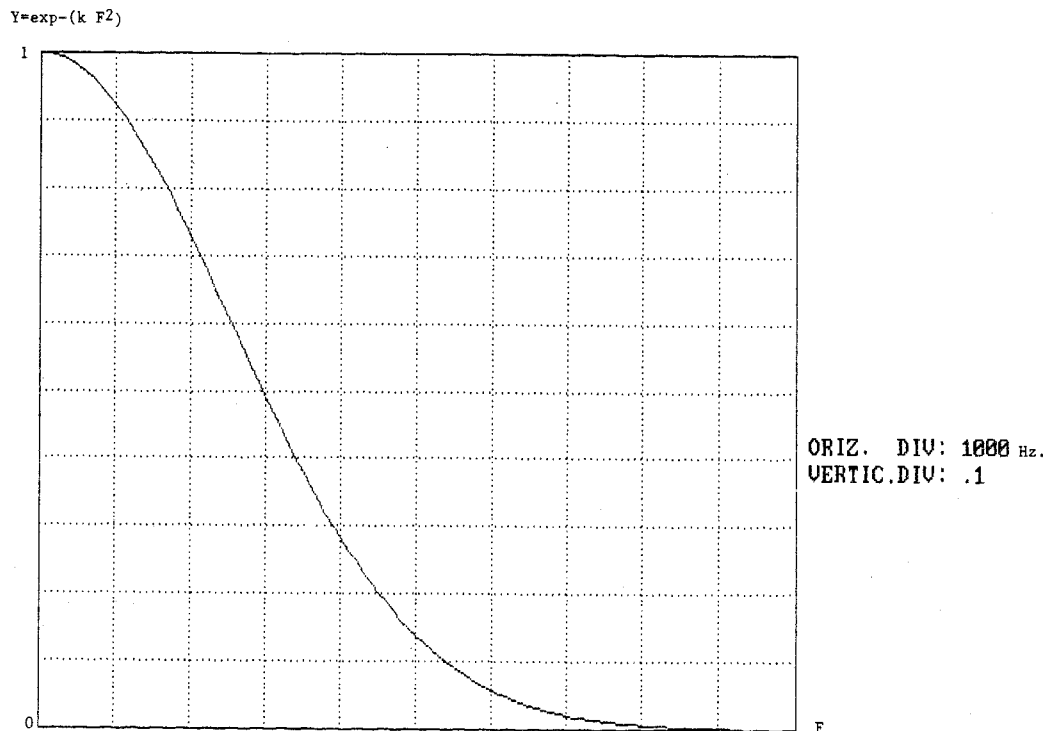
cioè:

$$G(W) \cong \exp ( - W^2 / 4a ) =$$

$$= \exp -[ (3.14 F)^2 / 1.247 \cdot 10^8 ]$$

L'analisi frequenziale termina con il tracciamento della  $G(W)$  così come mostrato in figura 8.3 dove  $K$  è :

$$K = 3.14^2 / ( 1.247 \times 10^8 )$$



*Figura 8.3 Curva rappresentativa di  $G(W)$*

### 8.2.1 UN METODO PER LA DETERMINAZIONE DELLO SPETTRO DEL SEGNALE NEL CASO DI BANDA RETTANGOLARE.

Se dal rilievo per punti della  $C(r)$  e dal successivo tracciamento dell'andamento si individua un profilo simile alla  $C(r)$  riportata nella figura 1.9 del capitolo 1 si può tentare la determinazione dello spettro

rettangolare come segue:

Con riferimento a quanto abbiamo evidenziato nel paragrafo 1.3.1.1 del 1° capitolo si potrà scrivere:

$$DF = 1/(2 r'')$$

dove  $r''$  è il valore di ritardo misurato che dà il primo zero della modulante di  $C(r)$

$$Fo = 1/(4 r')$$

dove  $r'$  è il valore di ritardo misurato che dà il primo zero della funzione coseno :

dato che  $DF = (F2-F1)/2$  e  $Fo = (F2+F1)/2$  si potrà scrivere il sistema

$$\left. \begin{array}{l} (F2-F1)/2 = 1/(2 r'') \\ (F2+F1)/2 = 1/(4 r') \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} F2-F1 = 1/(r'') \\ F2+F1 = 1/(2r') \end{array} \right\}$$

$$\text{da cui } F1 = (1/4r') - (1/2r'') \text{ ed } F2 = (1/2r'') + (1/4r') \quad 8.3)$$

Se ad esempio si ha  $r' = 29.411$  microsec. e  $r'' = 333.33$  microsec. sarà:

$$F1 = 1/(4 \times 29.411 \text{ microsec.}) - 1/(2 \times 333.33 \text{ microsec.}) \cong 7000 \text{ Hz}$$

$$F2 = 1/(4 \times 29.411 \text{ microsec.}) + 1/(2 \times 333.33 \text{ microsec.}) \cong 10000 \text{ Hz}$$

Se invece dal rilievo per punti della  $C(r)$  e il conseguente tracciamento si individua un profilo simile alla  $C(r)$  riportata nella figura 1.10 del capitolo 1 si ha immediatamente:

$$F1 = 1/(2r') \quad 8.4)$$



dove  $r'$  è il primo valore del ritardo che azzerava la  $C(r)$ .

Se ad esempio  $r' = 200$  microsecondi  $F_1$  sarà:

$$F_1 = 1/(2 \times 200 \text{ microsec.}) = 2500 \text{ Hz}$$

### 8.3 LA DETERMINAZIONE DELLA FREQUENZA DEL SEGNALE MONOCROMATICO

L'analisi della frequenza del segnale monocromatico di cui si sia misurata la funzione di correlazione  $C(r)$  è cosa piuttosto semplice.

Sappiamo che la funzione di autocorrelazione normalizzata di un segnale  $f(t) = A \text{ Sen } Wt$  è data da:

$$C(r) = \text{Cos } Wr$$

se disponiamo in via teorica di una sola coppia di valori della  $C(r)$  normalizzata,  $r'$  e  $C(r')$ , misurati all'interno del primo zero della  $C(r)$ , esclusa naturalmente la coppia  $r = 0$  e  $C(0)$  il problema è risolto; infatti possiamo scrivere:

$$C(r') = \text{Cos } Wr' \text{ da cui } W = \frac{\text{Arcocos } C(r')}{r'}$$

$$\text{ed } F = \frac{\text{Arcocos } C(r')}{6.28 r'} \quad 8.5)$$

Naturalmente, per eseguire un'analisi della frequenza ragionevolmente precisa, è necessario ripetere il calcolo per il maggior numero di coppie possibili, misurate entro il primo zero di  $C(r)$ , facendo poi la media dei risultati ottenuti.

Vediamo un esempio; siano stati misurati gli 8 valori della  $C(r)$  normalizzata riportati in tabella:

$r'$ microsec.	$C(r')$
40	0.97
60	0.93
80	0.86
100	0.80
120	0.73
140	0.60
160	0.52
180	0.41

calcoliamo in base all'espressione  $F = \frac{\text{Arcocos } C(r')}{6.28 r'}$

gli 8 corrispondenti valori di frequenza ; questi sono :

$F1 = 977.5$  ;  $F2 = 998.9$  ;  $F3 = 1065.9$  ;  $F4 = 1024.6$

$F5 = 998.5$  ;  $F6 = 1054.7$  ;  $F7 = 1019$  ;  $F8 = 1015.8$

la media degli otto valori porta al valore della frequenza cercata:

$F = 1019.3$  Hz .

#### **8.4 CORRELAZIONE DI UN SEGNALE IMPULSIVO ED ANALISI FREQUENZIALE.**

Il problema, allo stato delle conoscenze finora acquisite, impone di dividere in due parti distinte l'argomento:

LA PARTE 1<sup>a</sup> che riguarda i correlatori in grado di elaborare segnali impulsivi, che non abbiamo preso in esame in precedenza.

LA PARTE 2<sup>a</sup> che riguarda il metodo di analisi della frequenza dell'impulso.

### 8.4.1 CORRELATORI PER SEGNALI IMPULSIVI

I correlatori per segnali monocromatici impulsivi, sia di tipo analogico che digitale, hanno una struttura simile a quelle già esaminate nel capitolo 2; la differenza fondamentale risiede nell'unità di integrazione d'uscita.

Nei correlatori per segnali stazionari, l'integratore è formato da una semplice cellula RC la cui frequenza di taglio  $F_t$  è resa più bassa possibile per abbattere la varianza; questa caratteristica non consente però risposte rapide del correlatore che non sarebbe certo in grado di elaborare un segnale  $f(t)$  di tipo impulsivo.

Nei correlatori per segnali impulsivi la cellula di integrazione viene sostituita con un filtro passa basso opportunamente dimensionato per consentire il filtraggio dei prodotti  $f(t) \times f(t+r)$  nel tempo della durata dell'impulso del segnale.

Le funzioni di queste nuove cellule di integrazione si possono comprendere meglio se seguiamo il ragionamento che segue:

Supponiamo di dover correlare un segnale impulsivo di durata  $T_k$  e del tipo  $f(t) = A \text{ Sen } Wt$ ; applichiamo ad esso l'integrale generale per il calcolo della  $C(r)$  già menzionato nel paragrafo 1 e cioè:

$$C(r) = (1/T_k) \int_0^{T_k} A \text{ Sen } Wt \times A \text{ Sen } W(t+r) dt$$

sviluppando abbiamo :

$$C(r) = (1/T_k) \int_0^{T_k} (A/2)^2 \text{ Cos } (Wr) dt - (1/T_k) \int_0^{T_k} (A/2)^2 \text{ Cos}(2Wt+Wr) dt$$

questo risultato ci mostra che la  $C(r)$  è composta di due integrali; il primo è quello che ci condurrà alla funzione di correlazione normalizzata  $C(r) = \text{Cos } Wr$  il secondo è quello che ci porterà la varianza su

$C(r)$ ; che in questo caso è la seconda armonica del segnale originale.

Nei correlatori per segnali persistenti, dato il basso valore di  $Ft$  della cellula di integrazione, il secondo termine praticamente diventa trascurabile, però il dispositivo non risponde a segnali impulsivi.

Nel caso invece di un correlatore per segnali impulsivi il circuito integratore dovrà limitare il passaggio della seconda armonica del segnale, lasciando però al segnale impulsivo una banda passante pari almeno al reciproco della sua durata;

$$\text{Banda passante} \cong 1/TK$$

Un correlatore per segnali impulsivi è mostrato in figura 8.4

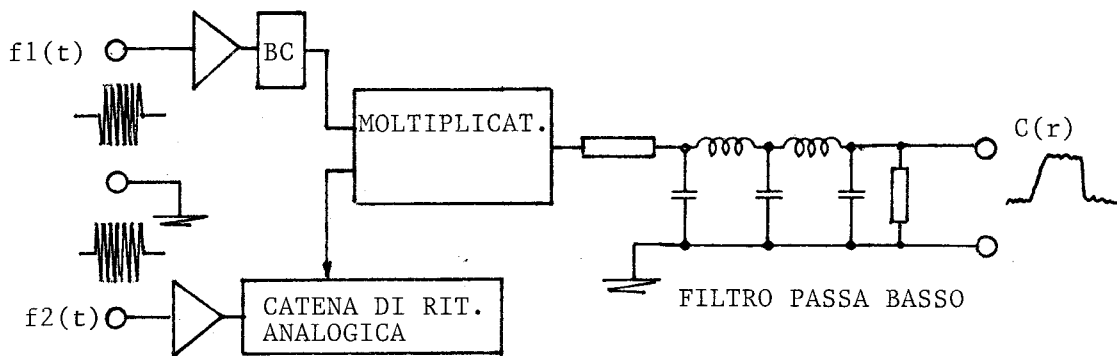


Figura 8.4 Correlatore per segnali impulsivi

Come si vede la struttura è quella classica, ma al posto della cellula di integrazione d'uscita c'è un filtro passa basso.

Si intuisce facilmente che in questi casi, non potendo abbattere la varianza d'uscita con valori di  $Ft$  molto bassi, ma essendo obbligati a valori di  $Ft \cong 1/TK$  il sistema sarà meno immune al disturbo.

Dalla figura 8.4 si osserva inoltre che, essendo le  $f1(t)$  e  $f2(t)$  impulsive, anche la  $C(r)$  d'uscita è a carattere impulsivo.

Un esempio numerico prima di chiudere questo argomento è utile.

Supponiamo che si debba correlare un impulso della durata di 10 mSec. alla frequenza di 32000 Hz; si dovrà dimensionare un filtro passa

basso con una banda passante pari a :

$$\text{Banda passante} \cong 1/10 \text{ mSec.} = 100 \text{ Hz}$$

questo filtro consentirà il passaggio della  $C(r)$  impulsiva ed inoltre attenuerà notevolmente la seconda armonica del segnale che si troverà piazzata a 64000 Hz.

Il filtro però con la banda assegnata di 100 Hz potrà attenuare poco la varianza del rumore inquinante il segnale e di ciò si dovrà tenere conto nei calcoli del rapporto  $S_u/N_u$  per la determinazione del differenziale di riconoscimento del correlatore.

La  $C(r)$  d'uscita sarà un impulso della durata di 10 msec., smussato dall'azione del filtro passa basso.

## **8.4.2 ANALISI FREQUENZIALE DEL SEGNALE IMPULSIVO**

### **8.4.2.1 Osservazioni sul metodo d'analisi**

Data la breve durata del segnale è praticamente impossibile misurare la frequenza dell'impulso in base ai criteri esposti nel paragrafo 8.3; le strade da seguire sono diverse e tutte molto complicate; abbiamo scelto come esempio di sistema per analisi frequenziale di un impulso, un lavoro originale dell'autore che ha portato a risultati molto soddisfacenti.

Questo tipo di analisi, che non sfrutta le informazioni derivate dalle funzioni di correlazione, rappresenta un valido complemento ai sistemi di correlazione per impulsi che necessitino, contemporaneamente alla misura della  $C(r)$  anche la misura della frequenza contenuta nell'impulso da elaborare.

Il sistema di analisi frequenziale che ci accingiamo a proporre non può essere assimilato con poche formule applicative; il lettore interessato dovrà seguire un elaborato procedimento analitico che, anche se esce un pò dallo spirito che ispira questo libro, può senz'altro dare le soddisfazioni che meritano a coloro che, cimentandosi nell'impresa,

vedono poi la realizzazione fisica di quanto si sono attesi.

#### **8.4.2.2 Metodo per la misura della frequenza di un impulso**

Viene descritto in questo paragrafo, passo dopo passo, il metodo per la misura della frequenza di un impulso monocromatico.

Il metodo si basa su di un processo analogico-numerico completamente dedicato al calcolo della frequenza dell'impulso con l'ausilio di routine di validazione e filtraggio dati per ridurre gli effetti dei disturbi che inquinano il segnale. La descrizione degli algoritmi di calcolo è accompagnata da dettagli di carattere circuitale che inquadrano a grandi linee l'architettura del sistema di elaborazione. L'argomento è completato da un esempio numerico e da una procedura per la determinazione degli errori sistematici strumentali che propongono il metodo per applicazioni di carattere generale.

#### **8.4.2.3 Descrizione del procedimento matematico**

Il metodo di calcolo riguarda la determinazione della frequenza di un segnale sinusoidale contenuto in un impulso di breve durata di cui si conosca a priori il campo di variabilità della frequenza,  $2DF$ , e per conseguenza la frequenza centrale  $F_e$  del campo stesso. Il procedimento matematico su cui si basa il metodo di analisi frequenziale si avvale della costruzione delle componenti in quadratura del segnale contenuto nell'impulso, con esse si determinano prima  $n+1$  coppie di campioni ortogonali, poi le  $n$  tangenti ottenute dal rapporto delle coppie, e successivamente gli  $n$  argomenti delle tangenti con i quali, dopo opportune medie, si calcola infine la frequenza media contenuta negli argomenti stessi.

La scelta della funzione tangente è voluta per evitare che eventuali variazioni di ampiezza delle coppie ortogonali alterino il valore dell'argomento; ciò nonostante appositi circuiti possono essere previsti per

limitare al massimo le variazioni di ampiezza del segnale.

#### 8.4.2.4 Implementazione del procedimento matematico

##### 8.4.2.4.1 La costruzione delle componenti ortogonali

Il primo passo per l'implementazione del metodo di calcolo consiste nella costruzione delle componenti ortogonali del segnale che si ottengono mediante la seguente impostazione:

$$\text{per i limiti del campo } S = A \text{ Sen}[6.28(F_c \pm DF)t] \quad 8.6)$$

$$\text{per una generica frequenza del campo } S = A \text{ Sen } (W_g t) \quad 8.7)$$

dove  $F_c$  è la frequenza centrale del campo,  $DF$  è la semivariazione della frequenza ammessa nel campo e  $W_g$  è una generica pulsazione facente parte del campo; dalla 8.7) si formano le componenti ortogonali.

L'operazione si esegue per via analogica moltiplicando (modulando) il segnale impulsivo per una frequenza locale disponibile nelle sue due funzioni in Seno e Coseno:

$$L_s = B \text{ Sen } W_o t$$

$$L_c = B \text{ Cos } W_o t$$

La modulazione consente di ottenere le coppie:

$$\begin{aligned} S \times L_s &= A \text{ Sen } W_g t \times B \text{ Sen } W_o t = \\ &= (AB/2) \text{ Cos}(W_g - W_o)t - (AB/2) \text{ Cos } (W_g + W_o)t \end{aligned} \quad 8.8)$$

$$\begin{aligned} S \times L_c &= A \text{ Sen } W_g t \times B \text{ Cos } W_o t = \\ &= (AB/2) \text{ Sen } (W_g - W_o)t + (AB/2) \text{ Sen } (W_g + W_o)t \end{aligned} \quad 8.9)$$

Si può scegliere il valore di  $F_o$  in modo tale che gli argomenti in  $(W_g - W_o)$  cadano nel campo delle basse frequenze in modo che, me-

diante l'azione di semplici filtri passa basso, sia possibile eliminare facilmente dalla 8.8) e dalla 8.9) i termini a frequenza più alta,  $(Wg+Wo)$ , per ottenere infine le componenti ortogonali richieste.

Ponendo infatti  $Fo=Fe-2 DF$ , dove  $2DF$  rappresenta la massima variazione di frequenza aspettata, si ha :

- per il limite superiore del campo di bassa frequenza

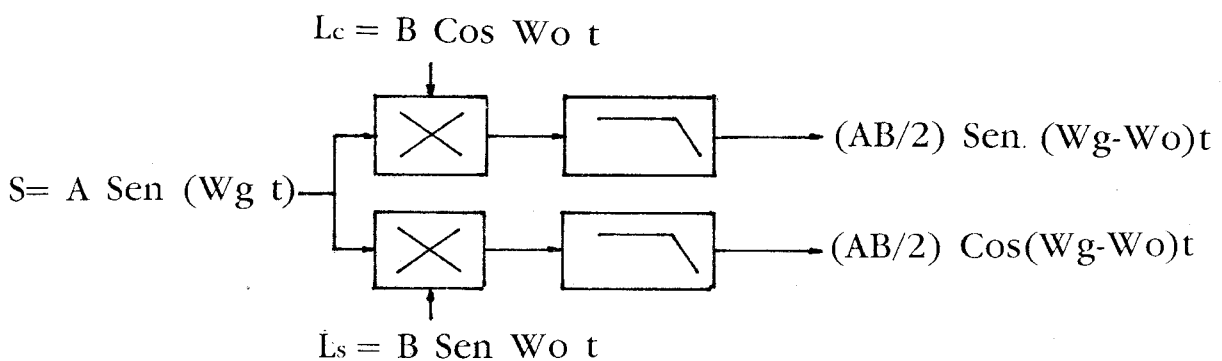
$$(Fe+DF-Fo) = [ Fe+DF-(Fe-2DF) ] = DF+2DF = 3DF$$

- per il limite inferiore del campo di bassa frequenza

$$(Fe-DF-Fo) = [ Fe-DF-(Fe-2DF) ] = DF$$

avremo perciò una traslazione degli estremi superiore ed inferiore del campo di frequenza originale del segnale  $(Fe \pm DF)$  in un campo di valori compreso tra  $DF$  e  $3DF$  dove i limiti di frequenza individuano rispettivamente il massimo e il minimo valore delle frequenze del campo.

La struttura per la realizzazione delle componenti ortogonali è mostrata in figura 8.5 , vedi Rif.bibliografico n.14.



*Figura 8.5 Generazione delle componenti ortogonali*



Per semplificare gli sviluppi successivi indicheremo le componenti ortogonali del segnale come segue:

$$\text{componente seno} = (AB/2) \text{ Sen } (Wg-Wo)t = a \text{ Sen } W^{\wedge} t \quad 8.10)$$

$$\text{componente coseno} = (AB/2) \text{ Cos } (Wg-Wo)t = a \text{ Cos } W^{\wedge} t \quad 8.11)$$

$$\text{dove } W^{\wedge} = (Wg-Wo) = 6.28 Fg^{\wedge} \quad 8.12)$$

con  $Fg^{\wedge}$  che potrà assumere tutti i valori compresi tra

$$(Fe-DF-Fo) = DF \quad \text{e} \quad (Fe+DF-Fo) = 3DF \quad 8.13)$$

#### 8.4.2.4.2 Formazione delle coppie dei campioni ortogonali

Le coppie dei campioni ortogonali del segnale impulsivo traslato in frequenza vengono formate mediante due Sample/Hold che al ritmo imposto dalla frequenza di campionatura  $F_c$  prelevano dall'uscita dei filtri passa basso di figura 8.5 coppie contemporanee di segnali in quadratura alla distanza temporale

$$Dt = 1/F_c.$$

In questo caso particolare di elaborazione la frequenza di campionatura  $F_c$  deve essere scelta per sovraccampionamento del segnale, molto al di sopra del limite di ricostruzione di Nyquist, in modo da avere quante più coppie possibili di campioni, compatibilmente con le necessità di calcolo e i tempi di macchina, per prelevare dal segnale la massima quantità di informazione dato che il disturbo può aver alterato in alcune parti dell'impulso la forma d'onda che deve consentire la determinazione della frequenza.

Riprendendo le forme semplificate delle componenti ortogonali ri-

portate in 8.10) e in 8.11) possiamo scrivere i termini ottenuti dalla campionatura:

1 <sup>a</sup> coppia	$a \text{ Sen } \hat{W} t$	$a \text{ Cos } \hat{W} t$
2 <sup>a</sup> coppia	$a \text{ Sen } \hat{W} (t+Dt)$	$a \text{ Cos } \hat{W} (t+Dt)$
3 <sup>a</sup> coppia	$a \text{ Sen } \hat{W} (t+2Dt)$	$a \text{ Cos } \hat{W} (t+2Dt)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n <sup>a</sup> coppia	$a \text{ Sen } \hat{W} [t+(n-1)Dt]$	$a \text{ Cos } \hat{W} [t+(n-1)Dt]$
(n+1) <sup>a</sup> coppia	$a \text{ Sen } \hat{W} [t+ n Dt]$	$a \text{ Cos } \hat{W} [t+ n Dt]$

8.14)

Il valore indicativo di n è determinato dal rapporto tra la durata dell'impulso, Tk, e il valore calcolato di Dt :

$$n \cong Tk/ Dt$$

I segnali campionati sono trasferiti, mediante conversione A/D, nella memoria di una piccola unità di calcolo a microprocessore per le successive elaborazioni numeriche.

#### 8.4.2.4.3 Calcolo delle tangenti

I segnali campionati depositati in memoria dell'unità numerica vengono impiegati per il calcolo delle tangenti; il calcolo viene eseguito contemporaneamente alla cancellazione del tempo reale t che compare negli argomenti ed è una variabile non conosciuta.

Dato che tutte le coppie di campioni ortogonali sono legate a t si può scrivere:

$$X1 = \text{Tang } \hat{W} Dt = \text{Tang } [\hat{W} (t+Dt) - \hat{W} t] = \frac{\text{Sen } [\hat{W} (t+Dt) - \hat{W} t]}{\text{Cos}[\hat{W} (t+Dt) - \hat{W} t]}$$

$$= \frac{\text{Sen } [W \text{ ` } (t+Dt)] \text{ Cos } (W \text{ ` } t) - \text{Cos } [W \text{ ` } (t+Dt)] \text{ Sen } (W \text{ ` } t)}{\text{Cos } [W \text{ ` } (t+Dt)] \text{ Cos } (W \text{ ` } t) + \text{Sen } [W \text{ ` } (t+Dt)] \text{ Sen } (W \text{ ` } t)} \quad 8.15)$$

ottenendo così il primo valore della tangente, indipendente da t, impiegando nel calcolo la prima e la seconda coppia dei campioni presi rispettivamente al tempo t e al tempo (t+Dt).

Infatti nella 8.15) pur comparando la variabile t questa non incide sul valore di X1 data la particolare struttura della formula.

Procedendo in modo analogo si calcolano tutte le n tangenti, indipendenti da t, con la n esima che sarà :

$$X_n = \text{Tang } (W \text{ ` } Dt) = \text{Tang } \left\{ W \text{ ` } [t+nDt] - W \text{ ` } [t+(n-1)Dt] \right\} =$$

$$= \frac{\text{Sen}[W \text{ ` } (t+nDt)] \text{ Cos}\{W \text{ ` } [t+(n-1)Dt]\} - \text{Cos}[W \text{ ` } (t+nDt)] \text{ Sen}\{W \text{ ` } [t+(n-1)Dt]\}}{\text{Cos}[W \text{ ` } (t+nDt)] \text{ Cos}\{W \text{ ` } [t+(n-1)Dt]\} + \text{Sen}[W \text{ ` } (t+nDt)] \text{ Sen}\{W \text{ ` } [t+(n-1)Dt]\}}$$

8.16)

Gli n valori delle tangenti vengono depositati nella memoria della macchina per le successive fasi di calcolo.

#### 8.4.2.4.4 Calcolo degli argomenti e della frequenza

Dai valori di X1 .....Xn calcolati in base a quanto indicato nel paragrafo precedente si determinano i corrispondenti argomenti che contengono l'informazione relativa alla frequenza dell'impulso. È però necessario fare una importante considerazione sull'algoritmo di calcolo: esso è soggetto alle limitazioni imposte dalla discontinuità della funzione tangente che, per la necessaria corrispondenza biunivoca tra argomento e variabile dipendente nel campo dei valori positivi, obbliga a contenere i valori degli argomenti nell'intervallo  $0 < (W \text{ ` } Dt) < 3.14/2$ .

Dato che il campo di variabilità di  $W^{\wedge}$  è già stato fissato in dipendenza della variazione massima DF e della frequenza di conversione  $F_0$  non resta che agire su Dt, cioè su Fc, per restare nel campo di continuità imposto per la tangente.

Scelta Fc per soddisfare le condizioni indicate segue la determinazione degli argomenti come segue:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \arctang X_1 = (W^{\wedge} Dt)^{\wedge} && \text{primo valore} \\
 y_2 &= \arctang X_2 = (W^{\wedge} Dt)^{\wedge\wedge} && \text{secondo valore} \\
 &\cdot && \cdot \\
 &\cdot && \cdot \\
 &\cdot && \cdot \\
 &\cdot && \cdot \\
 y_n &= \arctang X_n = (W^{\wedge} Dt)^* && \text{n esimo valore} \qquad \qquad \qquad 8.17)
 \end{aligned}$$

Il calcolo degli argomenti, anch'essi depositati in memoria, può essere fatto o per via numerica, con sensibili impegni di macchina, o più semplicemente mediante una tabella di corrispondenze tra i valori di  $Tang(W^{\wedge} Dt)$  ed  $y$  precalcolati con la definizione necessaria alla precisione con cui si vuole determinare la frequenza dell'impulso.

È opportuno che la tabella sia più ampia dei limiti del campo di  $(W^{\wedge} Dt)$  per accogliere anche la varianza che nei calcoli successivi può essere mediata.

Gli n valori degli argomenti  $y$ , nel caso ideale di un impulso non inquinato dal disturbo e trattamento analogico-numericò privo assolutamente di errori, sarebbero coincidenti; dato però che non si possono verificare tali condizioni i valori di  $y$  sono diversi tra loro ed evidenziano una certa varianza che deve essere opportunamente filtrata.

Dopo l'applicazione dei criteri di validazione e filtraggio dei dati, che vedremo nel paragrafo seguente, si calcola il valore medio di  $y$  :

$$M = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = (\hat{W} \text{ Dt}) \text{ medio} \quad 8.18)$$

dal valore di M si risale al valore medio della frequenza di  $\hat{W}$  :

$$\hat{F}_g = M / (6.28 \text{ Dt}) \quad 8.19)$$

e dato che  $\hat{W} = (W_g - W_o)$  vedi eq. 8.12) il valore di  $\hat{F}_g$  è:

$$\hat{F}_g = F_g - F_o$$

che sostituito con il valore ricavato dalla 8.19) dà:

$$(F_g - F_o) = M / (6.26 \text{ Dt})$$

$$\text{da cui} \quad F_g = [ M / (6.28 \text{ Dt}) ] + F_o \quad 8.20)$$

espressione finale di calcolo della frequenza dell'impulso ricevuto.

#### 8.4.2.5 Criteri di validazione e filtraggio dei dati

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente durante l'elaborazione numerica vengono applicati alcuni criteri di validazione e filtraggio dei dati intesi a ridurre, per quanto possibile, la varianza contenuta nei campioni ortogonali del segnale. L'effetto negativo della varianza potrà essere ridotto, sia mediante la non accettazione di quei dati manifestamente fuori dei campi di variabilità previsti, che messi a calcolo provocherebbero errori non più recuperabili, sia mediante azione di filtraggio delle serie di dati affetti da rumore a carattere gaussiano.

Qui di seguito sono illustrati alcuni criteri di validazione e filtraggio già sperimentati con buoni risultati, altri possono essere studiati per meglio adattare il metodo di analisi alle caratteristiche dell'impulso da analizzare.

I criteri di selezione dati sono elencati nell'ordine in cui vengono posti in essere durante la routine di calcolo :

A) Il valore generico di  $(\hat{W} \text{ Dt})$  deve essere inferiore a circa 1.1 volte il valore previsto per l'argomento agli estremi del campo di frequenza stabilito. Se ciò non si verifica il dato viene scartato e non contribuisce alla computazione dei valori di M.

B) Il primo valore di M calcolato, detto M1, viene confrontato con gli n valori di y depositati in memoria; viene calcolata la media degli errori :

$$(e) = \frac{|y_1 - M_1| + |y_2 - M_1| + \dots + |y_n - M_1|}{n} \quad 8.12)$$

con il valore di (e) si imposta una finestra di selezione dati pari a  $K = 4(e)$  e vengono fatte le seguenti considerazioni;

1) Se  $K > 1/4 (\hat{W} \text{ Dt})_{\max}$  si riduce la finestra a  $K=2(e)$

2) Se  $K < 1/4 (\hat{W} \text{ Dt})_{\max}$  si lascia il valore di  $K=4(e)$

Una volta determinata la finestra di selezione K si ripete il calcolo degli y impiegando, per il filtraggio, la finestra K:

Se la differenza  $|y - M_1| > K$  il valore di y è considerato errato e viene eliminato.

Se la differenza  $|y - M_1| \leq K$  il valore di y è considerato valido e viene messo a calcolo.

C) Se nella applicazione della finestra risultano troppi valori scartati rispetto al numero dei campioni disponibili è opportuno che, automaticamente, la macchina riproceda ai calcoli escludendo dal computo porzioni di impulso comprendenti le zone estreme che più facilmente possono essere affette da distorsioni di varia natura.

#### 8.4.2.6. Esempio numerico semplificato

Per prendere confidenza con il metodo di elaborazione che abbiamo illustrato e per entrare successivamente nel merito degli errori sistematici è utile eseguire un esempio numerico che per semplicità suppone condizioni ideali : assenza di disturbi e trattamento analogico privo di errori.

##### IPOSTESI SUI DATI BASE

Supponiamo di dover determinare la frequenza di un impulso della durata  $T_k = 12$  mSec. e che l'impulso stesso sia limitato in un campo di frequenze ampio  $DF = \pm 320$  Hz in cui la frequenza centrale del campo sia  $F_e = 6000$  Hz.

Dato che il campo in cui si dovrà misurare la frequenza  $F_g$  dell'impulso sarà compreso tra  $(F_e - DF)$  e  $(F_e + DF)$  cioè tra 5680 Hz e 6320 Hz assumiamo per il nostro esempio che la frequenza dell'impulso ricevuto sia  $F_g = 6240$  Hz.

##### CALCOLO DELLA FREQUENZA LOCALE DI CONVERSIONE

Determiniamo ora la frequenza locale  $F_o$  per la costruzione delle componenti ortogonali nel rispetto delle condizioni suggerite nel paragrafo 8.4.2.4.1

$$F_o = F_e - 2DF = 6000 - (2 \times 320) = 5360 \text{ Hz}$$

##### DETERMINAZIONE DELLE COPPIE ORTOGONALI

Dopo il processo di moltiplicazione del segnale  $F_g$  per la frequenza locale  $F_o$  il segnale originale sarà traslato in bassa frequenza assumendo il valore :

$$F_g' = F_g - F_o = 6240 - 5360 = 880 \text{ Hz}$$

In base a questo dato si procede alla costruzione delle due componenti

ortogonali , secondo la 8.10) e la 8.11), che saranno disponibili all'uscita dei filtri di figura 8.5 :

$$\begin{aligned} \text{-componente seno} \quad a \text{ Sen } \hat{W} t &= \\ &= a \text{ Sen } 6.28 \hat{F} g t = \\ &= a \text{ Sen } 6.28 \times 880 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{-componente coseno} \quad a \text{ Cos } \hat{W} t &= \\ &= a \text{ Cos } 6.28 \times 880 t \end{aligned}$$

### CALCOLO DELLA FREQUENZA DI CAMPIONATURA

Prima della determinazione delle coppie di campioni ortogonali dobbiamo stabilire il valore della frequenza di campionatura  $F_c = 1/Dt$  in base alle osservazioni riportate nel paragrafo 8.4.2.4.2.

Per rispettare segno e continuità della funzione tangente dovrà essere :  $0 < (\hat{W} Dt) < 3.14 / 2$  .

-Per il valore superiore del campo di variabilità di  $\hat{F} g$ , cioè per  $\hat{F} g \text{ max} = (\hat{F} g \text{ max} - F_o) = (F_e + DF - F_o) = 6320 - 5360 = + 960 \text{ Hz}$  , deve essere :  $(\hat{W} Dt) = 6.28 \times 960 \times Dt = 6.28 \times 960/F_c < 3.14 / 2$

-Per il valore inferiore del campo di variabilità di  $\hat{F} g$ , cioè per  $(\hat{F} g \text{ min} - F_o) = (F_e - DF - F_o) = 5680 - 5360 = +320 \text{ Hz}$ , deve essere:

$(\hat{W} Dt) \text{ min} = 6.28 \times 320 \times Dt > 0$  , condizione evidentemente verificata per qualsiasi valore di  $Dt$ .

Nella scelta di  $F_c$  è inoltre opportuno considerare l'utilità di lavorare in un tratto di tangente non molto ripido; si è visto che è conveniente contenere il valore massimo di  $(\hat{W} Dt)$  entro  $3.14/2.25$  ; perciò ponendo  $(\hat{W} Dt) \text{ max} = 6.28 \times 960/F_c = 3.14/2.25$  si calcolano  $F_c$  e  $Dt$ :  
 $F_c = 2.25 \times 2 \times 960 = 4320 \text{ Hz}$  ;  $Dt = 1/4320 = 231.48 \text{ microsec}$ .



## FORMAZIONE DEI CAMPIONI ORTOGONALI

Per l'esempio che stiamo seguendo, dato che abbiamo ipotizzato trattamento privo di errori e assenza di disturbo, è sufficiente la determinazione di due coppie di campioni, invece di  $\sim (Tk/Dt)+1$ , per procedere all'applicazione di tutta la procedura di calcolo; si scrivono pertanto le coppie :

$$\begin{array}{lll} \text{prima coppia} & a \text{ Sen } (\hat{W} \ t) & a \text{ Cos } (\hat{W} \ t) \\ \text{seconda coppia} & a \text{ Sen}[\hat{W} \ (t+ Dt)] & a \text{ Cos } [\hat{W} \ (t+Dt)] \end{array}$$

che con i termini numerici risultano :

$$\begin{array}{ll} a \text{ Sen } (6.28 \times 880 \times t) & a \text{ Cos } (6.28 \times 880 \times t) \\ a \text{ Sen}[6.28 \times 880(t+231.48/10^6)] & a \text{ Cos}[6.28 \times 880(t+231.48/10^6)] \end{array}$$

## CALCOLO DELLE TANGENTI

Dato che abbiamo formato soltanto due coppie di campioni possiamo calcolare un solo valore di tangente (è chiaro che in assenza di disturbo e di errori di elaborazione tutti gli n valori di tangente coincidono); applicando la 8.15), per qualsiasi valore di t, si ha :

$$X1 = \text{Tang } (\hat{W} \ Dt) = 3.340$$

## CALCOLO DEGLI ARGOMENTI

Dal valore di X1 determinato al passo precedente si calcola il valore di y1 :

$$y1 = \text{arctang } X1 = \text{arctang } 3.340 = 1.2798 \text{ radianti}$$

## CALCOLO DELLA MEDIA M

Nel nostro caso M coincide con y1

$$M = y1 = 1.2798 \text{ radianti}$$

## CALCOLO DELLA FREQUENZA RICEVUTA

Applicando la 8.20) otteniamo il valore della frequenza dell'impulso:

$$F_g = \frac{M}{6.28 \times Dt} + F_0 = \frac{1.2798 \times 10^6}{6.28 \times 231.48} + 5360 = 6240.37 \text{ Hz}$$

Il valore calcolato di  $F_g = 6240.37 \text{ Hz}$  non coincide esattamente con il valore aspettato di  $6240 \text{ Hz}$  date le approssimazioni fatte con i decimali durante i calcoli.

### 8.4.2.7 Determinazione degli errori sistematici

Basandoci sull'esempio numerico riportato nel paragrafo 8.4.2.6 possiamo vedere come incidono su  $F_g$  gli errori sistematici di ampiezza e di fase che sono gli effetti più frequenti delle distorsioni del sistema di conversione e filtraggio analogico mostrato in figura 8.5.

Consideriamo allo scopo la 8.19) che esprime il termine variabile della 8.20) :

$F_g = M/(6.28 \times Dt)$  ; è interessante conoscere come varia  $F_g$  in dipendenza degli errori sistematici di ampiezza e fase dai quali sono affette le coppie ortogonali; se si suppone per semplicità che gli errori massimi di ampiezza e di fase, intesi come differenze tra gli errori dei due canali di elaborazione in tutto il campo di frequenza utile, siano concentrati su di un solo canale ( ad esempio il canale coseno) si potranno esprimere con due soli parametri impostando una nuova equazione di  $F_g$  così formulata :

$$F_g^{**} = \frac{M^{**}}{6.28 \times Dt} \quad 8.22)$$

Nella valutazione degli errori sistematici si deve calcolare la media  $M^{**}$  anche se supponiamo che il segnale non sia inquinato dal disturbo casuale; infatti in presenza di soli errori di trattamento è necessaria una valutazione della media dato che i campioni, pur equidistanti tra loro, non vengono formati nelle stesse posizioni quadrantali rispetto al segnale sinusoidale e gli errori sistematici incidono diversamente da campione a campione.

L'espressione di  $Fg^{\wedge}$ , frequenza aspettata nel caso ideale di assenza di disturbi ed errori sistematici, può essere scritta :

$$Fg^{\wedge} = y / (6.28xDt) \tag{8.23}$$

mentre per l'equazione di  $Fg^{**}$ , affetta dai soli errori di elaborazione del segnale, si deve determinare l'espressione di  $M^{**}$  nel seguente modo :

1- Si formano le componenti ortogonali in Seno secondo la 8.14)

2 – Si impostano le nuove componenti ortogonali in Coseno:

invece che  $a \text{ Cos } (W^{\wedge} t)$  la nuova  $aP \text{ Cos } (W^{\wedge} Dt+\beta)$

invece che  $a \text{ Cos } [W^{\wedge} (t+ Dt)]$  la nuova  $aP \text{ Cos}[W^{\wedge} (t+ Dt)+\beta]$

.....

invece che  $a \text{ Cos}\{W^{\wedge} [t+(n-1) Dt]\}$  la nuova  $aP \text{ Cos}\{W^{\wedge} [t+(n-1) Dt]+\beta\}$

$$\tag{8.24}$$

dove P è l'errore in ampiezza e  $\beta$  è l'errore di fase.

3- In base alle 8.24) si costruiscono le nuove tangenti dove  $Xn^{**}$

è :  $Xn^{**} = \text{Tang}(W^{\wedge} Dt)^{**} =$

$$\frac{\text{Sen } [W^{\wedge} (t+nDt)]P\text{Cos}\{W^{\wedge} [t+(n-1)Dt]+\beta\}-P\text{Cos}[W^{\wedge} (t+nDt)+\beta] \text{ Sen}\{W^{\wedge} [t+(n-1)Dt]\}}{P\text{Cos}[W^{\wedge} (t+nDt)+\beta] P\text{Cos}\{W^{\wedge} [t+(n-1)Dt]+\beta\}+\text{Sen}[W^{\wedge} (t+nDt)] \text{ Sen}\{W^{\wedge} [t+(n-1)Dt]\}}$$

$$\tag{8.25}$$

4- Applicando la 8.17) si calcolano i valori di  $y^{**}$  dove l'ennesimo è:  
$$y_n^{**} = \arctang X_n^{**} \quad 8.26)$$

5- Applicando la 8.18) si calcola infine la media degli  $y^{**}$  affetti dagli errori di trattamento :

$$M^{**} = \frac{y_1^{**} + y_2^{**} + \dots + y_n^{**}}{n}$$

Con la determinazione di  $M^{**}$  si può scrivere l'espressione completa di  $F_g^{**}$  come già indicato nella 8.22).

$$F_g^{**} = \frac{M^{**}}{6.28 Dt}$$

A questo punto possiamo agevolmente applicare la 8.22) per valutare gli errori su  $F_g$  nel caso numerico del paragrafo 8.4.2.6 ; in esso il campo di variabilità di  $F_g$  è compreso tra 320 Hz e 960 Hz ,  $Dt$  è fissato in 231.48 microsec. e  $T_k = 12$  mSec. con un numero di campioni pari a  $(T_k/Dt)+1 \cong 52$ .

Gli errori sistematici massimi dei canali analogici possono essere ipotizzati in due valori tecnicamente accettabili :

- l'errore di ampiezza  $P$  si può ragionevolmente assumere entro il 10 % cioè  $P= 1.1$
- l'errore di fase  $\beta$  si può assumere entro 2 gradi (0.035 rad.)

Con i valori sopra indicati è stato ottenuto il seguente risultato : la  $F_g^{**}$  differisce dalla  $F_g$  per meno del  $\pm 0.5\%$  in tutto il campo delle frequenze considerato. Questa percentuale si ripercuote naturalmente in modo ancor meno sensibile sul valore della frequenza  $F_g$  dell'impulso di cui  $F_g$  è una piccola parte.

Il dato ottenuto è molto significativo; altri possono essere computati

in base a particolari esigenze di progetto distribuendo gli errori sistematici in altro modo e se necessario anche in funzione della frequenza di lavoro.

## 8.5 CONCLUSIONI

Il metodo di elaborazione e calcolo che è stato descritto ha mostrato in laboratorio e in fase applicativa una ottima "robustezza" e precisione consentendo la misura della frequenza degli impulsi in modo più che soddisfacente per gli impieghi previsti.

Grazie ai criteri di validazione e filtraggio dei dati il metodo ha consentito di eseguire, ancora con buona precisione, rilievi della frequenza dell'impulso anche in condizioni di basso rapporto segnale/disturbo.

Il sistema di elaborazione esposto può essere impiegato anche in campi di frequenza molto diversi da quelli mostrati nell'esempio ; è chiaro infatti che il metodo possa essere applicato in tutti quei casi in cui si debba risolvere semplicemente il problema della determinazione della frequenza di un impulso di breve durata con precisione strumentale controllata.