NOTE SULL'INTEGRAZIONE NUMERICA DEL FALCON

1) Introduzione

Il processo d'integrazione numerica da eseguire su P.C. è l'equivalente dell'operazione analogica che si attua con un circuito R.C.
Nel caso d'integrazione analogica i segnali da integrare sono applicati all'ingresso di una cellula R.C. alla cui uscita si ottiene, secondo una specifica legge, la somma di tutti i contributi di tensione applicati all'ingresso; nel caso d'integrazione numerica i segnali campionati da integrare sono applicati al P.C. mediante conversione A/D, e la loro somma, secondo la legge che andremo ad illustrare,è disponibile, dopo conversione D/A, all'uscita della macchina.
A volte, in particolari applicazioni tecniche,l'integrazione numerica è realizzata su di una sola scheda con microprocessore e convertitori A/D e D/A.
In molti casi le routine di integrazione numerica operano all'interno di appositi programmi di calcolo che girano sul P.C, da questi ricevono dati e li restituiscono integrati; i risultato dell'integrazione non sempre deve uscire dalla macchina, a volte può essere trasferito ad altre routine operative all'interno del P.C.
L'integrazione numerica necessita che i segnali da elaborare siano campionati, secondo Nyquist, con frequenza superiore al doppio della frequenza massima dei segnali stessi.

2) Definizione dei termini

Prima d'iniziare l'esposizione della materia è utile definire alcuni simboli che andremo ad utilizzare; questi fanno riferimento ad ipotetiche locazioni di memoria all'interno del P.C. o del microprocessore:

con $\mathbf{X}$ s'identifica il dato numerico campionato che, in tempo reale, viene immesso a calcolo ($\mathbf{x}$ può essere il corrispondente numerico di una tensione od altra variabile da integrare)

con $\mathbf{X}_m$ s'identifica il contenuto della cellula di memoria che conserva il dato precedentemente calcolato dalla routine d'integrazione dopo m campioni di x

con $\mathbf{X}_{m+1}$ s'identifica il contenuto della cellula di memoria che conserva il dato calcolato dalla routine d'integrazione al campione m+1

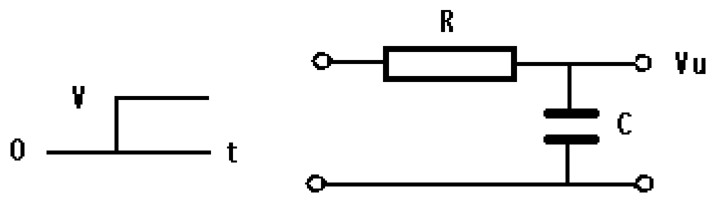
con β si indica il coefficiente d'integrazione che agisce nella routine di calcolo, questa variabile, contenuta in apposita memoria, ha funzione corrispondente alla costante di tempo RC che caratterizza l'integratore analogico.

3) L'algoritmo di calcolo

L'algoritmo di calcolo per l'integrazione numerica, da implementare in apposita routine iterativa, è il seguente:

$$\mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{X} + \mathbf{X}_m - \mathbf{X}_m / \beta \qquad 1)$$

L'analisi del comportamento della funzione indicata richiede un richiamo della funzione analoga relativa al circuito integratore RC sotto riportato:



Questo circuito è caratterizzato dalla sua risposta al gradino di tensione; se applichiamo all'ingresso, per un tempo indefinito t, una tensione a scalino di ampiezza V la tensione Vu all' uscita è data dall'espressione:

$$Vu = V\ (1 - e^{-t/RC}) \qquad 2)$$

dall'espressione si deduce facilmente :

$Vu = 0$ al tempo $t = 0$

$Vu \approx 63\%\ V$ al tempo $t = RC$

$Vu = V$ per $t = \infty$

Un comportamento simile alla 2) è caratteristico della 1) nella quale al posto dello scalino di tensione si deve ipotizzare l'applicazione di un valore numerico X costante per un tempo indefinito t, in questo caso il valore numerico d'uscita X_m ha il seguente andamento:

$X_m = 0$ al campione $m=0$

$X_m \approx 63\%\ X$ al campione $m = \beta$ per $\beta > 100$

$X_m = \beta\ X$ al campione $m = \infty$

Queste caratteristiche si definiscono sviluppando la 1) come segue:

$$X_{m+1} = X + X_m - X_m/\beta = X + X_m\ (1 - 1/\beta)$$

che per $(1 - 1/\beta) = K$ diventa:

$$X_{m+1} = X + K\ X_m \qquad 3)$$

Se osserviamo la 3) mano a mano che i campioni di X entrano a calcolo abbiamo:

$X_1 = X$ dato che alla prima acquisizione $X_m=0$

per il secondo campione si ha:

$X_2 = X + KX = KX+X$ dato che alla seconda acquisizione $X_m=X$

per il terzo campione si ha:

$X_3 = X + K(X+KX) = X+ KX+ K^2 X$ dato che alla terza acquisizione $X_m=X+KX$

per il quarto campione si ha:

$X_4 = X + K(X+ KX+ K^2 X) =$ dato che alla quarta acquisizione $X_m= X+ KX+ K^2 X$

$= X + KX + K^2X + K^3 X$

procedendo in modo analogo per l'acquisizione m $_{esima}$ si può scrivere:

$X_m =X + KX + K^2X + K^3 X + ...+ K^{m-1} X$

da cui:

$X_m =X(1+ K + K^2 + K^3 X+ ....+ K^{m-1})$ **4)**

la serie geometrica riportata nella 4) è convergente e la sua m_{esima} somma è:

$X_m = X [(1- K^m) / (1-K)]$ **5)**

il limite della 5) per $m \to \infty$ è

$$X_{m=\infty} = \lim_{m \to \infty} X [(1- K^m)/(1 - K)] = X [1/(1 - K)] \quad \textbf{6)}$$

sostituendo nella 6) il valore assegnato a K ; $K = (1 - 1/ \beta)$ si ha:

$X_{m=\infty} = X \beta$ **7)**

dalla 7) si evince, come enunciato, che il valore numerico massimo che l'integratore può fornire all'uscita, con infiniti campioni d'ingresso, è pari al prodotto tra il coefficiente d'integrazione e il valore dei campioni stessi.

La caratteristica che indica il valore $X_m \approx 63\%$ X al campione $m = \beta$ per $\beta > 100$, si verifica dalla 5) , sostituendo β al posto di m si ha :

X_β = X [$(1- K^\beta) / (1-K)$] **8)**

calcolando l'espressione $(1- K^\beta) / (1-K)$ della 8) per qualsiasi valore di $\beta > 100$ si ha

$$(1- K^\beta) / (1-K) \approx 0.63 \qquad \textbf{9)}$$

4) Versatilità dell'algoritmo d'integrazione numerica
L'algoritmo in oggetto è ovviamente indispensabile per eseguire l'integrazione numerica via software, ha inoltre diverse caratteristiche importanti quali:

-possibilità di variare a comando, da tastiera od altro, la costante d'integrazione β per adattarla al meglio in base alla tipologia dei segnali numerici da elaborare.

-possibilità di integrare "simultaneamente" n canali d'integrazione indipendenti inserendo nel programma di calcolo n routine d'integrazione con β variabile su ciascuna routine.

-data la struttura essenzialmente semplice della 1) richiede tempi di calcolo irrilevanti.

-similmente all'integratore RC attenua la varianza sul valore integrato d'uscita così come mostrato nel successivo paragrafo 6).

-si presta a semplici implementazioni software per la simulazione del processo d'integrazione così come mostra il successivo punto 5).

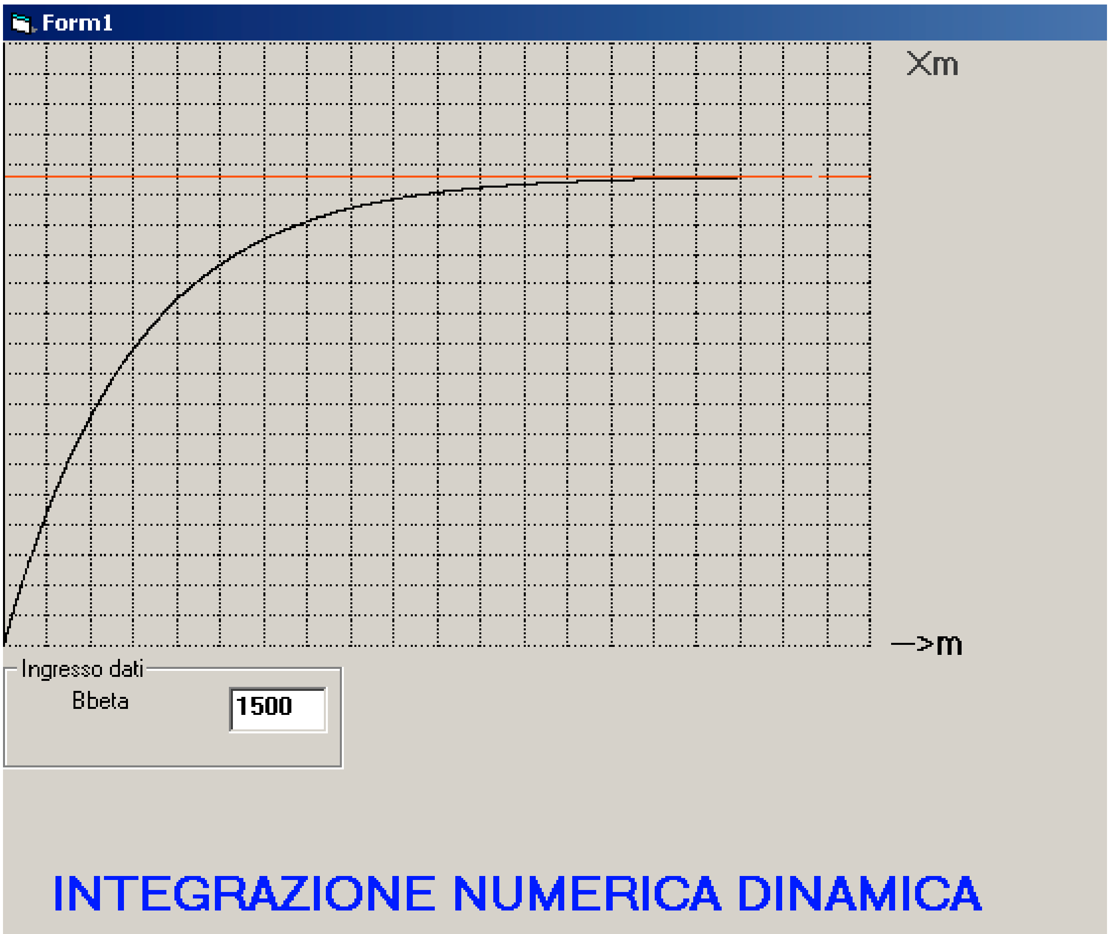
5) Simulazione dinamica dell'integratore su P.C.

Un semplice programma in VB mostra l'andamento della 1) in funzione del β inserito, fissato un valore di x = 2.33.
Il beta inserito può variare da 1 a 1920, una traccia orizzontale in rosso è posta al livello max = x β.
Sull'asse delle ascisse il numero delle acquisizioni è m = 10000 pari a 10000/20 = 500 acquisizioni per divisione del reticolo.
L'asse delle ordinate è calibrato per un livello numerico pari a 4480, 4480/20=224 per divisione del reticolo.

Il listato del programma è sotto riportato:

```
'DICHIARAZIONI VARIABILI
Dim beta As Integer
Dim xm As Single


'BOTTONE DI CALCOLO
Private Sub Command1_Click()
calcolo
End Sub

'ROUTINE FORMAZIONE RETICOLO
Private Sub Form_Paint()
For xi = 0 To 4600 * 1.4 Step 230 * 1.4
For yi = 0 To 3200 * 1.4 Step 20 * 1.4
PSet (xi, yi)
Next yi
Next xi
For yi = 0 To 3200 * 1.4 Step 160 * 1.4
For xi = 0 To 4600 * 1.4 Step 30 * 1.4
PSet (xi, yi)
Next xi
Next yi
Line (0, 0)-(0, 3200 * 1.4)
End Sub

'IMPOSTAZIONE TEXT BOX INGRESO BETA
Private Sub txtDigits1_KeyPress(KeyAscii As Integer)
If InStr("0123456789.-" + Chr(&H8), Chr(KeyAscii)) = 0 Then
KeyAscii = 0
End If
End Sub

'ROUTINE D'INTEGRAZIONE
Private Sub calcolo()
Cls
Call Form_Paint
Cls
Call Form_Paint
For m = 0 To 10000
beta = Val(Txtdigits1)
If beta > 1920 Then beta = 1920
X = 2.33 'dato ingresso fisso
'==============================

xm = X + xm - xm / beta  'ALGORITMO INTEGRAZIONE NUMERICA

'=============================
PSet (1.288 * m / 2, 4480 - xm), vb black
PSet (1.288 * m / 2, 4480 - (beta * X)), vbRed
Next m
End Sub
```

Una schermata di lavoro con il programma illustrato è riportata sotto per un valore di β = 1500:



Dal grafico si osserva che il processo d'integrazione va a regime dopo circa 7500 acquisizioni dal momento che riceve lo scalino numerico X = 2.33.
Il livello max= βX,sull'ordinata, è 15.7 div. pari ad un valore numerico di 15.7 * 224 = 3517.
Il livello che si riscontra sull'ordinata per m = $\beta = 1500$ è pari a 9.8 div. corrispondente a un valore numerico di 9,8 * 224 = 2240.
Il rapporto 2240/3517 = 0.639 indica che il livello d'uscita dell'integratore ,per m = β è il 63% del max così come enunciato al paragrafo 3).

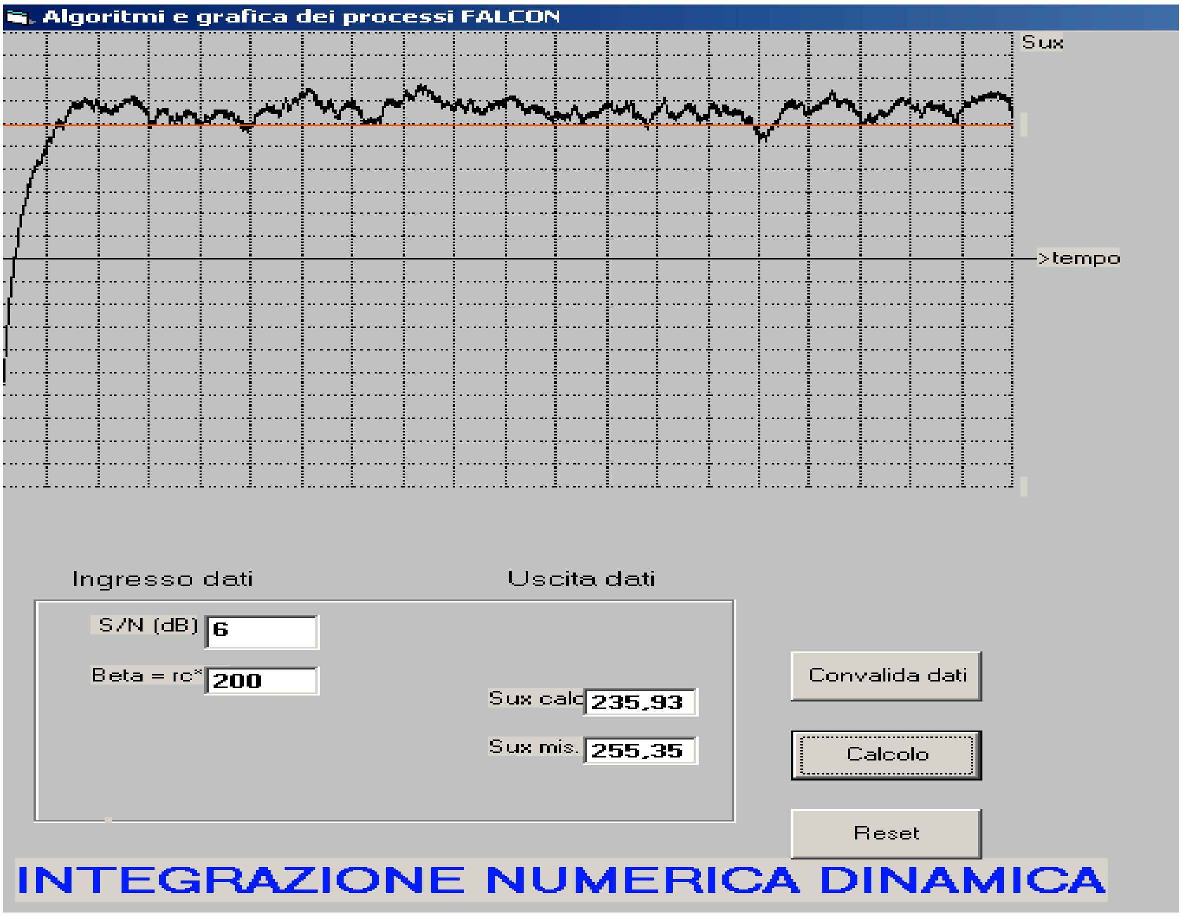
6) Simulazione dinamica per l'abbattimento del disturbo d'uscita

Compito dell'integratore è quello di abbattere il disturbo d'uscita, in altri termini, attenuare la varianza dovuta al rumore che perturba i segnali d'ingresso. Una volta appurato che l'integratore ha la risposta voluta al gradino numerico à interessante vederne il comportamento quando allo scalino numerico si sostituiscono segnali affetti da rumore.
Nel prosieguo mostreremo una serie di schermate, ottenute con un programma in VB, che rendono chiaro il ruolo della variazione del β nella riduzione della varianza d'uscita.

Il programma utilizza due segnali simulati affetti ciascuno da rumore, computa la loro correlazione e ne esegue l'integrazione numerica secondo l'algoritmo illustrato nel presente lavoro..
Del programma citato non è possibile fornire il listato data la sua complessità; se fosse di interesse prego inviare messaggio tramite la posta del sito.
Il programma contiene 12 routine con le seguenti funzioni:
-generazione reticolo
-ingresso dati
-generazione segnali
-generazione disturbi
-miscelazione segnali disturbi in base al rapporto S/N inserito da tastiera
-correlazione tra i due segnali
-integrazione numerica del prodotto di correlazione
-convalida dati
-calcolo e presentazione del livello numerico teorico d'uscita
-calcolo e presentazione del livello numerico misurato d'uscita
-presentazione grafica del segnale all'uscita dell'integratore
-reset

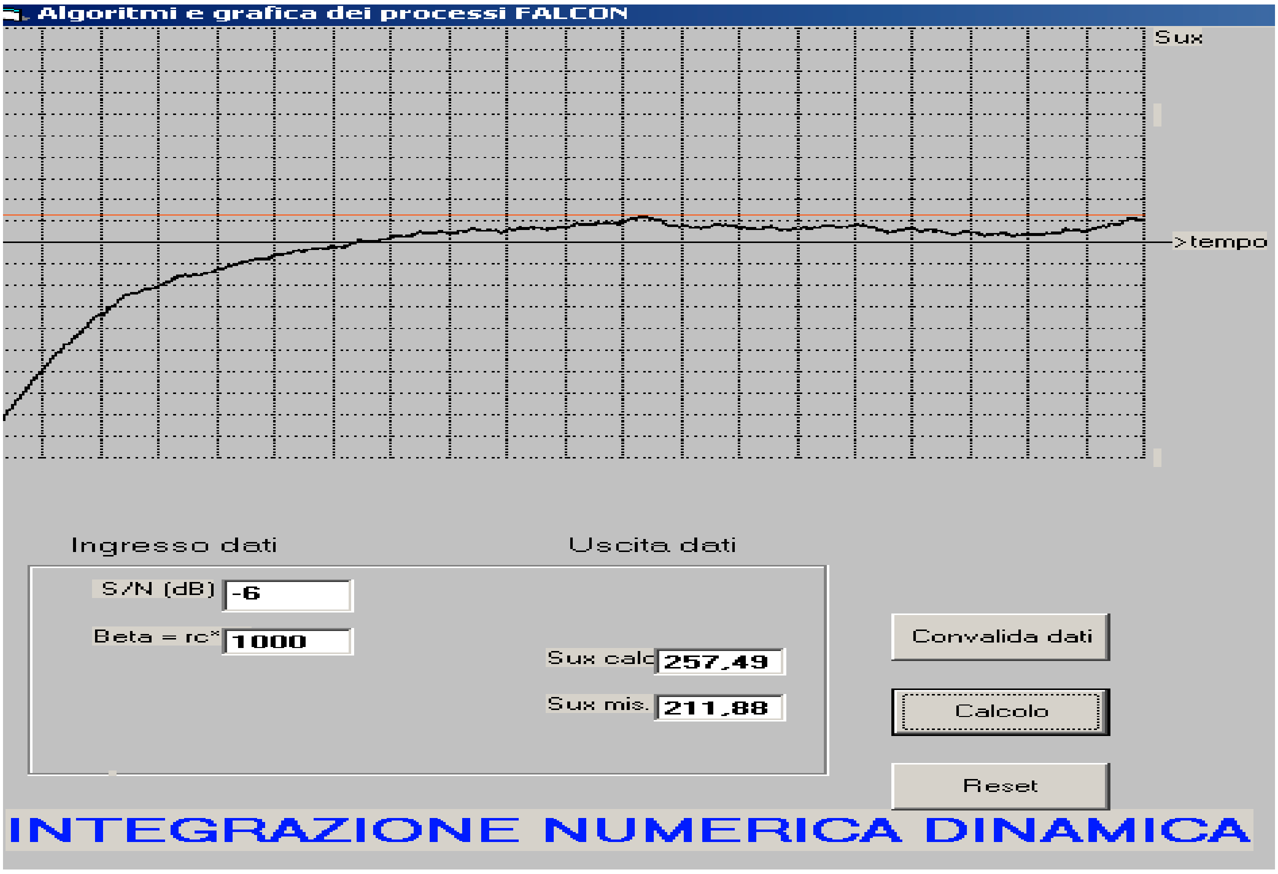
1- con +40 dB di S/N e beta =200 l'integratore rende, una volta a regime, il max d'uscita con varianza irrilevante.

2- con +6 dB di S/N e beta =200 l'integratore rende, una volta a regime, l'uscita con sensibile varianza .



3- con +6 dB di S/N e beta =1000 l'integratore rende, una volta a regime, l'uscita con varianza ridotta rispetto al caso 2- precedente .

4- con -6 dB di S/N e beta =1000 l'integratore rende, una volta a regime, l'uscita con sensibile varianza..



5- con -6 dB di S/N e beta =2000 l'integratore rende, una volta a regime, l'uscita con varianza sensibilmente ridotta rispetto al caso precedente.