

Principi ed applicazione dei metodi di autocorrelazione

*AR. Q. → Prof. T. D. S.
Per → Prof. D. M. S.*

I concetti di correlazione, che da tempo interessavano soltanto questioni di statistica demografica, sono diventati in questi ultimi anni, uno strumento utile in tutti i campi della ricerca scientifica.

L'estensione dei principi basilari e lo sviluppo di nuove teorie hanno condotto alla concezione dei recenti metodi analitici di correlazione.

Questi metodi vengono impiegati con profitto nello studio delle comunicazioni elettriche, nell'analisi dei quadripoli e dei sistemi di diffusione sonora, nella realizzazione dei radiotelescopi, nella rivelazione di rumori parassiti nei grandi complessi meccanici, nella elettroencefalografia ed in altre molteplici applicazioni.

Data la grande importanza di questo argomento, vogliamo portare a conoscenza del tecnico, i principi che informano l'adozione di questi recenti mezzi d'indagine e le applicazioni più immediate che da essi scaturiscono.

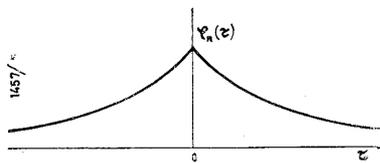


Fig. 1 - Andamento della funzione $\varphi_n(\tau)$.

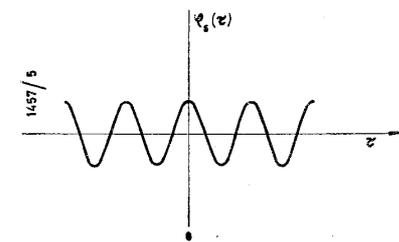


Fig. 2 - Andamento della funzione $\varphi_s(\tau)$.

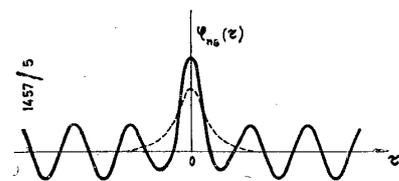


Fig. 3 - Andamento della funzione $\varphi_{ns}(\tau)$.

1. - DIPENDENZA STOCASTICA E CORRELAZIONE STATISTICA

Consideriamo due variabili casuali X ed Y , se il legame esistente tra esse è rilevabile statisticamente, e se è possibile dedurre, per determinati valori assunti da Y , con quale probabilità la variabile X assume particolari valori, si dice che la dipendenza delle due variabili è stocastica.

Il peso della dipendenza stocastica è espressa mediante il quadrato medio di contingenza:

$$\varphi^2 = f(P_i; P_k) \quad [1]$$

evidentemente φ^2 , essendo funzione delle sole probabilità, prescinde dalla natura qualitativa delle variabili; si osservi inoltre che per $\varphi = 0$ si ha la totale indipendenza stocastica.

È possibile introdurre il concetto di correlazione statistica allorché le variabili sono essenzialmente dei valori numerici, in questo caso il peso della dipendenza stocastica è espresso, mediante il coefficiente di correlazione R , dall'espressione:

$$R = \frac{\sum_1^n X_i Y_i}{\sqrt{\sum_1^n X_i^2 \sum_1^n Y_i^2}} \quad [2]$$

e il legame esistente tra le due variabili dicesi di correlazione statistica.

È opportuno osservare, che il coefficiente di correlazione ora definito tende

a $+1$ o a -1 allorché il grado di dipendenza delle due variabili tende alla diretta o all'inversa proporzionalità, se le due variabili tendono invece alla totale indipendenza, il valore di R si approssima allo zero.

2. - SERIE TEMPORALE E AUTOCORRELAZIONE

Il concetto di correlazione statistica tra due variabili è estensibile ad una serie temporale, supponiamo ad esempio che $Y(t')$ rappresenti un determinato valore assunto dalla serie temporale $y = Y(t)$ allo istante t' , analogamente che $Y(t' + \tau)$ rappresenti il valore assunto allo istante $(t' + \tau)$, se assumiamo un tempo di osservazione sufficiente possiamo formare un numero considerevole di coppie del tipo: $Y(t')$, $Y(t' + \tau)$, ed applicare a queste i criteri esposti in precedenza, il risultato sarà la determinazione della eventuale dipendenza di correlazione statistica tra i valori che la $y = Y(t)$ assume nel tempo.

Questi concetti assumono una più grande importanza in virtù delle caratteristiche intrinseche della serie temporale, per le quali è possibile determinare, in un intervallo di tempo T , un numero infinito di coppie del tipo: $Y(t)$, $Y(t + \tau)$, distanti l'una dall'altra di un valore infinitesimo dt ; ogni coppia porta i caratteri del grado di dipendenza esistente,

pertanto, il valor medio del prodotto degli elementi di ciascuna coppia, esteso a tutto il tempo di osservazione T , fornisce una indicazione approssimata del grado di dipendenza φ , questa indicazione sarà tanto più precisa quanto più grande sarà il tempo di osservazione, al limite per $T \rightarrow \infty$, il valore medio computato ci darà effettivamente il peso della dipendenza di autocorrelazione statistica $\varphi(\tau)$ per il quale vale la espressione:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T Y(t) Y(t + \tau) dt \quad [3]$$

Il calcolo di questa funzione, detta di autocorrelazione, è eseguito da particolari dispositivi elettronici che prendono il nome di correlatori; evidentemente il tempo impiegato per il computo della funzione di correlazione dipende, oltre che dalla precisione che si vuole ottenere, dalle caratteristiche della funzione in esame.

Analogamente è possibile determinare il peso della dipendenza di correlazione statistica tra due serie temporali distinte, in questo caso $\varphi(\tau)$ è espresso mediante la funzione:

$$\varphi_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y_1(t) Y_2(t + \tau) dt \quad [4]$$

detta di correlazione incrociata; è importante osservare che se le funzioni $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$, sono incoerenti tra loro, $\varphi_{12}(\tau)$ è uguale a zero.

3. - TEOREMA DI WIENER

Dobbiamo al matematico Wiener una ulteriore estensione dei concetti ora esposti. Mediante laboriose trasformazioni analitiche, che per semplicità omettiamo, la funzione di autocorrelazione assume una nuova forma:

$$\varphi(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad [5]$$

nella quale $G(\omega)$ rappresenta la funzione di densità spettrale.

Con questo sviluppo è possibile determinare la funzione di autocorrelazione di particolari serie temporali, delle quali sia nota la funzione di densità spettrale.

4. - DETERMINAZIONE DI PARTICOLARI FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE

Con il bagaglio di nozioni ora acquisite calcoliamo due tra le più importanti funzioni di autocorrelazione:

a) Funzione di autocorrelazione di una serie temporale $N(t)$, rappresentante l'andamento della tensione di rumore casuale captata da un generico sistema per la ricezione di radiosegnali; supponiamo che sia nota e costante la funzione della densità spettrale $G_n(\omega)$ di

$N(t)$ e che la funzione di risposta del sistema ricevente sia:

$Y(j\omega) = 1/(j\omega + b)$,
 pertanto la funzione della densità spettrale all'uscita del sistema sarà:

$$G(\omega) = G_n(\omega) \cdot Y(j\omega) = K/(j\omega + b)^2$$

Dagli elementi a disposizione vediamo che non è possibile determinare analiticamente la funzione di autocorrelazione altro che con la applicazione del teorema di Wiener, avremo perciò:

$$\varphi_n(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{\pi K b}{2} e^{-b|\tau|} \quad [6]$$

L'andamento della $\varphi_n(\tau)$ è riportato nel grafico di fig. 1, da esso si osserva che la funzione assume il massimo valore per $\tau = 0$, decresce poi esponenzialmente per valori di $|\tau| > 0$, se ne deduce pertanto che la funzione di autocorrelazione di un rumore caotico non presenta alcuna periodicità.

b) Funzione di autocorrelazione di un

$$\varphi_{ns}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [S(t) + N(t)] [S(t + \tau) + N(t + \tau)] dt$$

da questa con un semplice sviluppo otteniamo:

$$\varphi_{ns}(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau) + \varphi_{NS}(\tau) + \varphi_{SN}(\tau) \quad [8]$$

segnale del tipo $S(t) = A \cos \omega t$; in questo caso è possibile applicare direttamente l'espressione [3] ottenendo:**

$$\varphi_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty A \cos \omega t \cdot A \cos \omega(t + \tau) dt$$

sviluppando si ha:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau. \quad [7]$$

L'andamento della $\varphi_s(\tau)$, riportato nel grafico di fig. 2, permette di osservare che per $\tau = 0$ la funzione ha un massimo che si ripete periodicamente con periodo τ infinite volte.

Le funzioni $\varphi_n(\tau)$ e $\varphi_s(\tau)$ che abbiamo determinato con procedimenti analitici, adottando criteri diversi, sono automaticamente calcolabili mediante l'uso di un correlatore elettronico che elabora secondo lo stesso principio le tensioni in esame.

5. - APPLICAZIONE DEI PRINCIPI ANALITICI DELL'AUTOCORRELAZIONE

Per renderci conto della grande importanza dei metodi di correlazione, è opportuno esaminare una delle molteplici applicazioni, che questi recenti mezzi di indagine offrono nel campo della radio localizzazione.

Supponiamo pertanto di dover ricevere, mediante un generico sistema per la ricezione di radio segnali, una informazione $S(t)$, questa sarà, inevitabilmente, perturbata dalla presenza di un segnale di rumore $N(t)$, che, sommandosi alla informazione utile, darà luogo ad un segnale del tipo $F(t) = S(t) + N(t)$; è chiaro che se il rapporto $S(t)/N(t)$ è piccolo, è molto difficile determinare, con

i metodi tradizionali, la presenza dell'informazione.

Esaminiamo invece che cosa avviene se il segnale ricevuto è inviato ad un correlatore elettronico; questo dispositivo, come sappiamo, è capace di calcolare la funzione di autocorrelazione definita dalla [3], ovvero, nel nostro caso, la funzione:

a questo punto è opportuno osservare che in questa espressione i primi due termini sono quelli di autocorrelazione

delle funzioni $S(t)$ ed $N(t)$, gli altri due termini sono quelli di correlazione incrociata tra la funzione di segnale e quella di rumore, essendo però le $S(t)$ e $N(t)$ manifestamente incoerenti tra loro, i coefficienti di correlazione incrociata sono evidentemente nulli, all'uscita del correlatore sono quindi presenti soltanto i termini dovuti al processo di autocorrelazione della $S(t)$ e della $N(t)$.

Abbiamo dimostrato però in precedenza il comportamento delle funzioni di autocorrelazione nel caso in cui queste fossero proprio del tipo $S(t)$ e $N(t)$, non resta pertanto che applicare alla [8] i risultati ottenuti nelle [6] e [7]; si ha così:

$$\varphi_{ns}(\tau) = A^2 \cos \omega \tau + \frac{\pi K b}{2} e^{-b/|\tau|}$$

l'interpretazione di questa espressione è quanto mai ovvia:

la funzione di autocorrelazione della $F(t)$ è formata da due termini, l'uno, dovuto all'autocorrelazione di un segnale periodico, è periodico, l'altro, do-

vuto alla funzione di autocorrelazione di un rumore caotico, è esponenziale, per questo motivo l'andamento della $\varphi_{ns}(\tau)$, riportato in fig. 3, ha carattere periodico ed ampiezza decrescente con legge esponenziale.

Da questo risultato possiamo dedurre che, se il tempo di osservazione è sufficientemente grande, il correlatore permette di mettere in evidenza le periodicità che interessano l'informazione e quindi di discriminare questa dal rumore perturbante.

$$X_2(t) \cong X_1(0) \cdot A(t) + \sum_{\theta=\Delta t}^{\theta=t} X_1 A(t-\theta)$$

la quale per $\Delta\theta \rightarrow 0$ diventa:

$$X_2(t) = X_1(0) A(t) + \int_0^t \frac{dX_1}{d\theta} A(t-\theta) d\theta$$

6. - ANALISI DELLO SPETTRO DI FREQUENZA MEDIANTE CORRELAZIONE

Un'altra interessante applicazione dei metodi di correlazione è dovuta allo sviluppo del teorema di Wiener; si dimostra che la funzione di densità spettrale $G(\omega)$ è determinabile dalla funzione di autocorrelazione $\varphi(\tau)$ mediante l'espressione:

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad [9]$$

ovvero, che la $G(\omega)$ è la trasformata di Fourier della $\varphi(\tau)$.

È quindi possibile, determinata la funzione di autocorrelazione $\varphi(\tau)$, di una particolare banda di rumore, determinarne la funzione di densità spettrale calcolando la [9].

Questo nuovo tipo di analisi è attuabile disponendo di un correlatore elettronico per il calcolo della $\varphi(\tau)$ e di un analizzatore differenziale per la elaborazione di questa, applicando opportunamente, all'ingresso di un oscilloscopio, l'uscita dell'analizzatore differenziale, è possibile visualizzare l'andamento della $G(\omega)$.

La complessità di questo dispositivo è giustificata dalle ottime prestazioni fornite, precisione e velocità di analisi, che altrimenti non sarebbero realizzabili.

7. - ANALOGIA TRA CORRELAZIONE E FILTRAGGIO

Alla luce di principi esposti nei paragrafi precedenti, esaminiamo ora le analogie che esistono tra i metodi di correlazione e gli usuali metodi di filtraggio. Come sappiamo, per definire il comportamento di un filtro è necessario conoscere l'ammettenza indiciale $A(t)$, ovvero la risposta alla funzione a gradino unitaria, quando $A(t)$ è nota, è possibile determinare, per una qualsiasi tensione $X_1(t)$ applicata all'ingresso, la ten-

sione $X_2(t)$ in uscita; supponiamo pertanto di dover determinare la tensione $X_2(t)$ in uscita da un filtro, di cui sia nota l'ammettenza indiciale $A(t)$, allorché all'ingresso di questo è applicata una tensione arbitraria del tempo $X_1(t)$; a questo scopo possiamo considerare la $X_1(t)$ costituita dalla sovrapposizione di gradini unitari ΔX_1 distanti l'uno dall'altro del tempo $\Delta\theta$, si da assimilare la $X_2(t)$ in uscita ad una somma di termini del tipo $[\Delta X_1 \cdot A(t)]$, più precisamente:

integrando per parti ed osservando che $A(0) = 0$ otteniamo:

$$X_2(t) = \int_0^t X_1(\theta) A'(t-\theta) d\theta$$

ricordando, che la derivata prima dell'ammettenza indiciale rappresenta la risposta $h(t)$ del filtro, quando a questo viene applicato l'impulso unitario, possiamo scrivere:

$$X_2(t) = \int_0^t X_1(\theta) h(t-\theta) d\theta \quad [10]$$

dalla [10] risulta l'analogia esistente tra il filtraggio e la correlazione, poiché la tensione $X_2(t)$ presente all'uscita del filtro è analoga a quella che si otterrebbe mediante un processo di correlazione incrociata tra due tensioni del tipo $X_1(t-\theta)$ e $h(\theta)$.

In altre parole; se ad un dispositivo elettronico di correlazione, vengono applicate due tensioni, $h(t)$ e $X_1(t)$, la prima dovuta ad un generatore locale, la seconda ad un segnale generico, la funzione di correlazione incrociata risultante, è uguale alla tensione che si avrebbe all'uscita di un filtro, avente risposta $h(t)$, allorché all'ingresso venisse applicata la tensione $X_1(t)$.

In virtù di un laborioso sviluppo analitico, i concetti ora esposti assumono una più grande importanza.

Si dimostra (*) infatti, che la correlazione equivale ad un filtraggio che può essere fisicamente irrealizzabile con i metodi tradizionali. Questo vale evidentemente sempreché l'analisi del segnale sia estesa per un tempo sufficientemente grande.

8. - DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN FILTRO

Ricordiamo, che, per determinare la caratteristica di risposta in frequenza $Y(j\omega)$ di un filtro, è sufficiente cono-

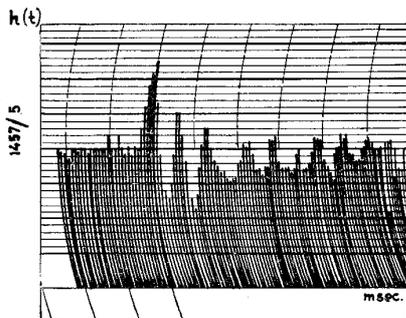


Fig. 4 - Esempio tipico di registrazione della $h(t)$ di un filtro in esame.

(*) Maurizio Federici - La correlazione e le sue applicazioni al filtraggio nei servomeccanismi.

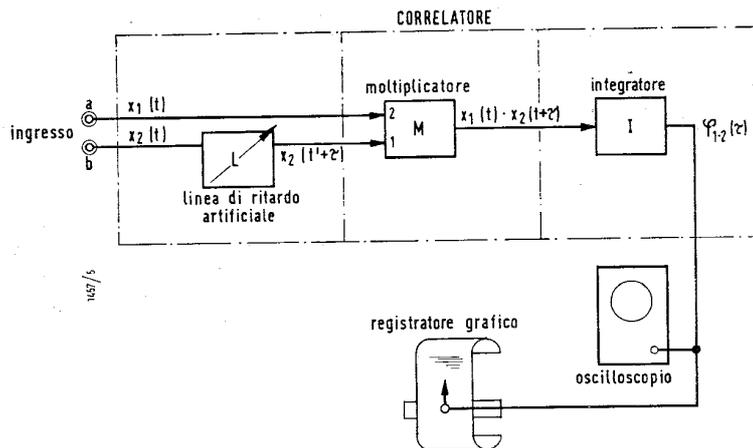


Fig. 5 - Dispositivo elettronico di correlazione.

scerne la $h(t)$ in quanto le due funzioni sono legate l'una all'altra mediante la trasformata di Fourier.

È quindi di grande importanza la determinazione della $h(t)$ nello studio dei filtri e delle reti elettriche; la correlazione offre a questo proposito la possibilità di valutare, con grande precisione, la funzione di risposta all'impulso unitario, permettendo così una più accurata analisi del comportamento degli elementi in questione.

Vogliamo ora dimostrare come sia possibile determinare la funzione $h(t)$ di un filtro mediante il metodo di correlazione, a questo scopo serviamoci dei risultati ottenuti nello studio iniziato nel paragrafo precedente.

Preleviamo le tensioni $X_1(t)$ e $X_2(t)$ presenti rispettivamente all'ingresso e all'uscita del filtro in esame e applichiamo ad un correlatore elettronico; per la [4], la funzione di correlazione incrociata sarà:

$$\varphi_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} X_1(t) X_2(t + \tau) dt$$

sostituendo in questa espressione il valore di $X_2(t)$ trovato nella [10] otteniamo:

$$\varphi_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} X_1(t) h(\theta) X_1(t - \theta + \tau) dt d\theta$$

ovvero

$$\varphi_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) d\theta \varphi_{11}(\tau - \theta)$$

ma essendo, per $\tau = \theta$, $\varphi_{11}(0) = 1$, abbiamo $\varphi_{12} = h(\theta)$, questa espressione ci dice appunto che la funzione di risposta del filtro non è altro che la funzione di correlazione incrociata tra le tensioni di ingresso ed uscita di questo.

Disponendo quindi, all'uscita del corre-

latore, un registratore grafico, è possibile rilevare l'andamento della $h(t)$ del filtro in esame. Un esempio significativo di questo tipo di registrazione è riportato in fig. 4.

9. - DISPOSITIVI ELETTRONICI DI CORRELAZIONE

Per completare questo studio è necessario accennare ai dispositivi elettronici che permettono di valutare la funzione di correlazione. Un correlatore convenzionale è costituito essenzialmente da tre unità: a) Unità artificiale di ritardo, b) Unità moltiplicatrice, c) Unità integratrice, dalla disposizione circuitale di queste, riportata in fig. 5, è possibile comprendere come vengano elaborate le tensioni $X_1(t)$ ed $X_2(t)$ applicate ai morsetti d'ingresso (a) e (b): la tensione $X_2(t)$, ritardata del tempo (τ) , mediante la linea artificiale L , è applicata all'ingresso N. 1 del moltiplicatore M , all'ingresso N. 2 è invece applicata la tensione $X_1(t)$, il prodotto delle due, perviene quindi all'integratore I il quale compie l'ultima opera-

zione del processo, fornendo, in uscita, la funzione di correlazione, questa è visualizzabile, a seconda delle sue caratteristiche, su di un T.R.C. di un oscilloscopio o sulla pista scorrevole di un registratore grafico.

Delle due unità calcolatrici, M ed I , generalmente impiegate in un correlatore, assume particolare importanza la unità M ; dalla efficienza e dal costo di questa dipendono la bontà dei risultati e il costo totale del dispositivo di corre-

lazione; per risolvere nel migliore dei modi ora l'una o l'altra esigenza sono state proposte diverse soluzioni. Ne citeremo alcune a scopo orientativo: Moltiplicatori elettronici, realizzabili economicamente, che sfruttano la somma e la differenza dei quadrati delle tensioni da elaborare; calcolatori analogici di elevata precisione, la cui complessità rende molto costosi; moltiplicatori basati sul noto principio di Hall, la cui utilizzazione rappresenta un soddisfacente compromesso.

Possiamo quindi concludere che il problema tecnologico della correlazione può considerarsi risolto allorché sia possibile disporre di elementi elettronici di moltiplicazione sufficientemente precisi.

10. - BIBLIOGRAFIA

MAURIZIO FEDERICI, *La correlazione e le sue applicazioni al filtraggio nei servomeccanismi* - «Automazione e strumentazione», N. 2 Febb. 1960.

G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità* - Volume I, Zanichelli (1948).

E. BOREL, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* - Tome I Guthier, Villar (1957).

BENDAT, *Principles and Applications of random noise theory*, Wiley 1958.

Y. W. LEE, *Applications of correlation analysis to the detection of periodic signal in noise* «Proceeding of the I.R.E.», Ottobre 1950.

F. H. LANGE, *Anwendung der Korrelationsanalyse in der Nachrichtentechnik* «Nachrichtentechnik», Gennaio-Febrero 1957.

B. A. BELL, *Statistical methods in Electrical Engineering*. - Chapman & Hall, 1953.

A