

um die Strahlerpunkte A_1 und A_2 beschrieben werden. Im übrigen liegen sämtliche Nullstellen (wegen $r_1/r_2 = a/b$) auf *einem* bestimmten Kreise, der die Strecke A_1A_2 harmonisch im Verhältnis $a:b$ teilt und

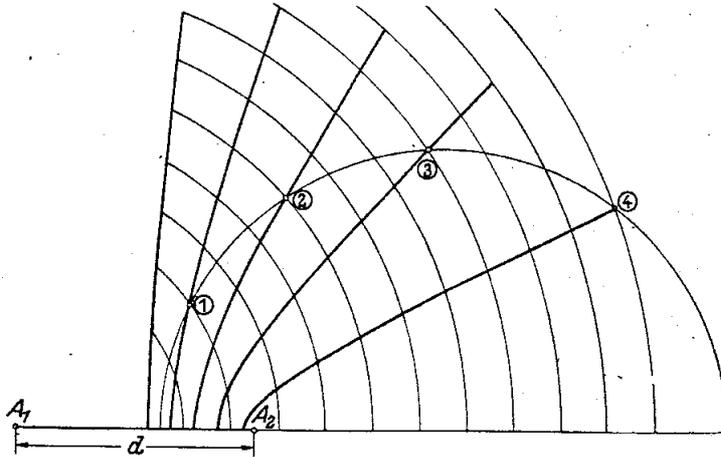


Abb. 44. Die Nullstellen des Schalldruckes von zwei punktförmigen Strahlern im Abstand $d = 5\lambda$ bei verschiedenem Deformationsvolumen.

dessen Mittelpunkt auf A_1A_2 liegt (s. Abb. 44). Der Radius dieses Kreises ist:

$$r = \frac{ab}{a^2 - b^2} \frac{d}{\lambda}.$$

In allgemeiner Weise läßt sich auf graphischem Wege eine Darstellung der Kurven gleichen Schalldruckes erreichen. Zu dem Zweck zeichnen wir den Verlauf des Vektors

$$r_1 = a \cdot \frac{e^{-i2\pi x}}{x}$$

und des Vektors

$$r_2 = -b \frac{e^{-i2\pi y}}{y}.$$

Das geschieht, indem man x bzw. y um $0,05$ wachsen läßt, so daß jeder Vektor aus dem vorhergehenden durch eine Drehung von $2\pi \cdot 0,05$, d. h. 18° , hervorgeht. Man hat dann nur nötig, durch den Nullpunkt die unter einem Winkel von 18° sich schneidenden Geraden zu zeichnen und auf ihnen die Längen a/x bzw. b/y abzutragen. So ergeben sich zwei Spiralen, die den Nullpunkt in immer engeren Windungen umschlingen. Hat man diese Spiralen mit den entsprechenden x und y -Werten beziffert, so kann man sämtliche Lösungen x, y der Gleichung:

$$\left| a \cdot \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + b \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c \quad (108)$$

angeben, indem man eine Strecke der Länge c so bewegt, daß der Anfangspunkt auf der einen (x) Spirale der Endpunkt auf der anderen (y) Spirale gleitet. Jede Lage der Strecke c definiert durch ihren Anfangs- und Endpunkt auf der Spirale ein Wertesystem x, y , das der Gleichung (14) genügt.

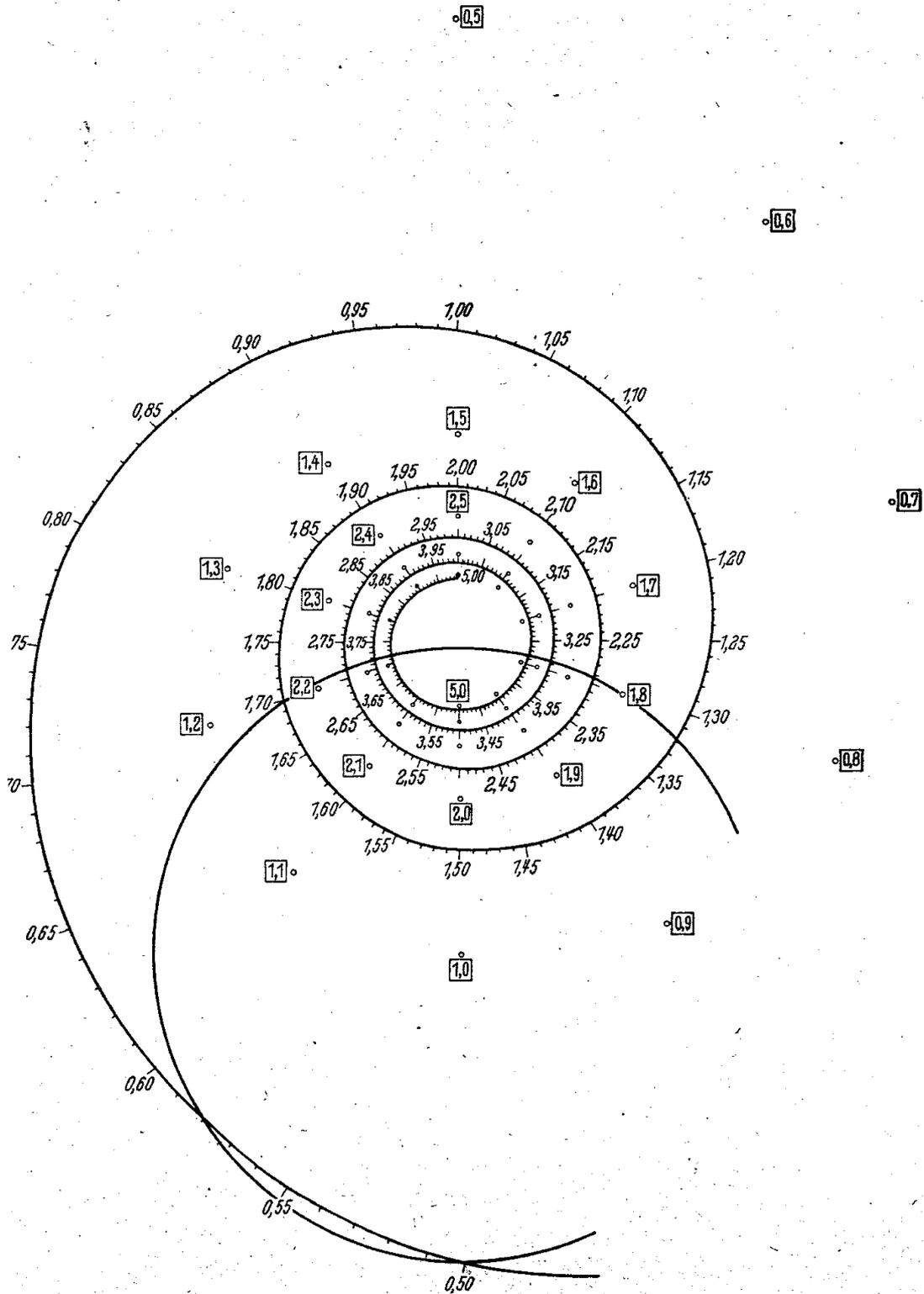


Abb. 45. Spirale zur Berechnung des Nahfeldes von zwei punktförmigen Strahlern.

Als Beispiel wählen wir $a = b = 1$, d. h. zwei Schallstrahler gleicher Intensität. In der Abb. 45 ist die Spirale $r_1 = e^{i2\pi x}/x$ für alle Werte von $x = 0,5$ bis $x = 5$ dargestellt. Um die Zeichnung nicht unübersichtlich zu machen, sind von der zweiten Spirale $r_2 = -e^{-i2\pi y}/y$ nur die den einzelnen Werten $y = 0,5$; $y = 0,6$; $y = 0,7$ usw. bis $y = 2,5$ entsprechenden Spiralepunkte dargestellt. Diese ergeben sich sehr einfach durch Spiegelung der entsprechenden Punkte der x -Spirale am Mittelpunkt. Diese Punkte sind durch kleine runde Kreise, denen die Ziffer in einem Quadrat beigeschrieben ist, gekennzeichnet. Beschreibe ich um einen solchen Punkt der y -Spirale, z. B. den Punkt $\boxed{1}$, einen Kreis mit dem Radius 1, so erhalte ich durch die an den Schnittpunkten mit der x -Spirale angegebene Bezifferung sämtliche (zwischen 0,5 und 5 liegenden) Werte x die der Gleichung

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi \cdot 1}}{1} \right| = 1$$

genügen.

Und zwar lesen wir aus der Abb. 45 die Lösungswerte ab: $x = 0,50$; $0,58$; $1,32$; $1,70$; $2,29$; $2,71$; $3,28$; $3,72$; $4,29$; $4,72$. Noch übersichtlicher wird der Zusammenhang, wenn wir die durch

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 1 = 0$$

definierte Kurve in den rechtwinkligen Koordinaten eintragen. Die eine Hälfte dieser Kurve ist in Abb. 46 dargestellt. Die andere Hälfte entsteht durch Spiegelung an der Geraden $y - x = 0$. Außerdem sind noch die Kurven für:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - \frac{1}{2} = 0, \quad \left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - \frac{3}{2} = 0 \quad (109)$$

und

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 2 = 0$$

in Abb. 46 aufgetragen.

Um aus diesen Kurven, die vom Strahlerabstand unabhängig sind, für einen bestimmten Strahlerabstand (z. B. $d/\lambda = 3$) die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes zu gewinnen, haben wir zwei Punkte A_1 und A_2 im Abstand $d/\lambda = 3$ zu zeichnen und um diese Kreise zu beschreiben, deren Radien durch die Koordinaten x und y des zu übertragenden Punktes gegeben sind. Dabei spielen aber nur die Koordinaten x , y eine Rolle, die zu reellen Schnittpunkten der beiden Kreise führen. Offenbar hängt dies wesentlich von dem Strahlenabstand ab. Aus der Bedingung für das Schneiden der beiden Kreise:

$$r_1 + r_2 \geq d \geq r_2 - r_1$$

folgt nun:

$$y + x \geq d/\lambda \geq y - x.$$

Zeichnen wir in der Abb. 46 die drei Geraden

$$y + x = d/\lambda; \quad y - x = d/\lambda, \quad y - x = 0$$

(wobei wir wegen der Symmetrie $r_2 > r_1$ voraussetzen und uns auf einen Quadranten beschränken können), so wird durch diese ein rechteckiger Streifen begrenzt, der alle und nur solche Punkte x, y enthält, für welche die Bedingung

$$y + x \geq d/\lambda \geq y - x \geq 0$$

erfüllt ist.

In der Abb. 46 ist für $d/\lambda = 3$ der entsprechende Streifen schraffiert gezeichnet. Man erkennt, daß z. B. von der Kurve:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| - 1 = 0$$

nur der punktierte Teil in Frage kommt. Übertragen wir die 4 Kurven, soweit sie dem schraffierten Streifen angehören, so erhalten wir die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes (für einen Quadranten). Dabei gibt jeder

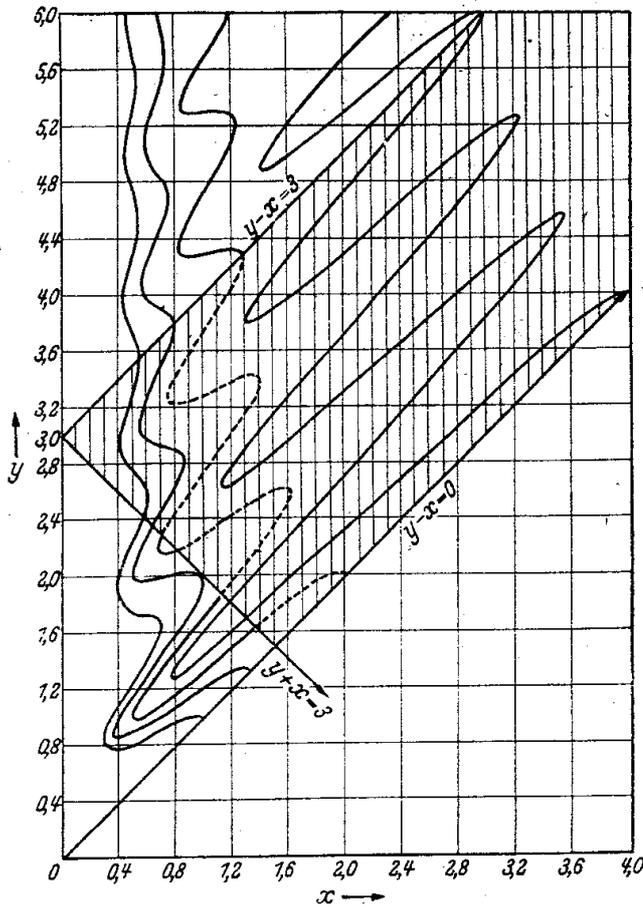


Abb. 46. Die Funktionen:

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c \text{ für } c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2.$$

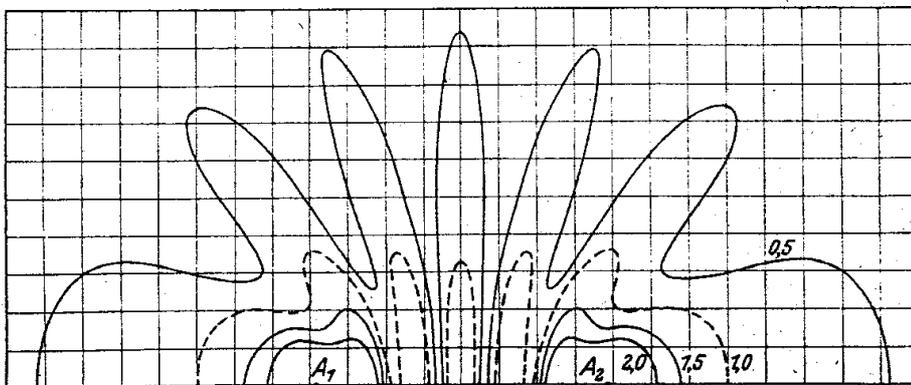


Abb. 47. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern im Abstand: $d = 3\lambda$.

Punkt der Kurven in Abb. 46 mit den Koordinaten (x, y) den zugehörigen Punkt in Abb. 47 als Schnittpunkt des um A_1 mit x und um A_2 mit y beschriebenen Kreises. Es ist wichtig, daß man bereits aus der

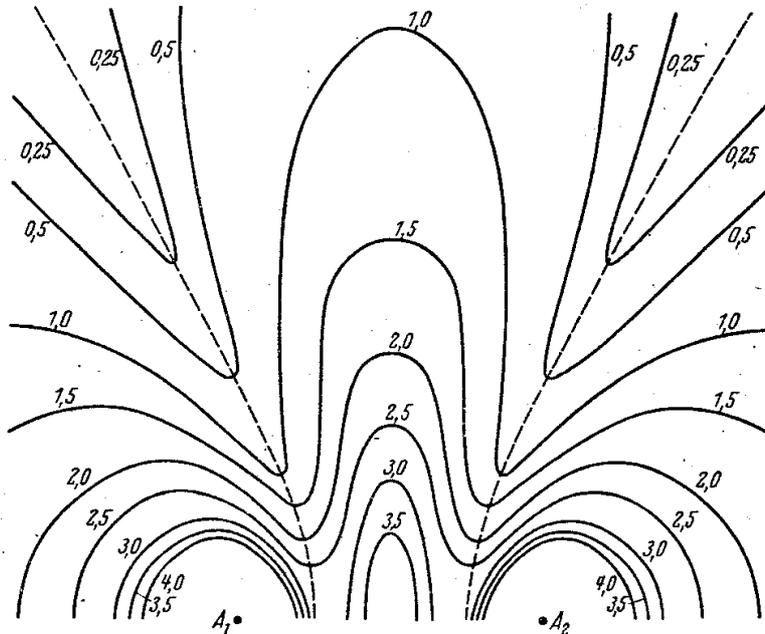


Abb. 48. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern mit gleichem Deformationsvolumen.

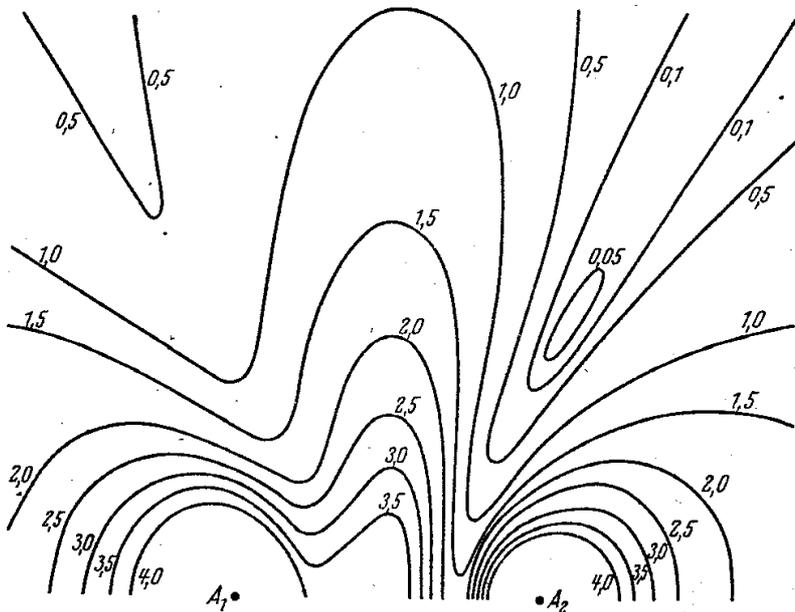


Abb. 49. Kurven konstanter Schalldruckamplitude bei zwei punktförmigen Strahlern mit verschiedenem Deformationsvolumen.

Abb. 46 sofort erkennt, ob die Kurve konstanten Schalldruckes aus *einer* kontinuierlichen Kurve besteht oder wieviel getrennte Kurvenzüge sich ergeben. So ergeben für $d/\lambda = 3$ die

$$\left| \frac{e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{e^{-i2\pi y}}{y} \right| = c$$

entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes für $c = 0,5$ zwei getrennte, für $c = 1$ drei getrennte Kurvenzüge; dagegen für $c = 1,5$ und $c = 2$ je einen kontinuierlichen Kurvenzug. In der Abb. 47 sind die entsprechenden Kurven konstanten Schalldruckes dargestellt. Der gesamte räumliche Verlauf entsteht daraus, indem man das ganze Gebilde um $A_1 A_2$ rotieren läßt. Dabei ergeben sich dann für $c = 0,5$ drei getrennte Flächen, für $c = 1$ fünf getrennte Flächen und für $c = 1,5$ und $c = 2$ je zwei getrennte Flächen. Lassen wir d/λ kleinere Werte annehmen, so wird der entsprechend schraffierte Bereich in Abb. 46 immer schmaler und die Anzahl der Extremwerte nimmt immer mehr ab, bis schließlich für $d/\lambda \leq \frac{1}{2}$ für alle Kurven nur noch ein Maximum (auf der Mittelachse) übrigbleibt.

In den Abb. 48 und 49 sind die Schallfelder gezeichnet, wenn $d/\lambda = 1$ ist, und zwar ist in Abb. 48

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = 1$$

angenommen, während in Abb. 49

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = 1,2; \quad \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = 0,8$$

gesetzt ist.

Nach den früheren Ausführungen muß sich im zweiten Fall eine Nullstelle ergeben (im räumlichen Schallfeld ein Nullkreis). Man sieht aus der Abb. 49, daß besonders in der Umgebung dieser Nullstelle eine ziemliche Unsymmetrie des Schallfeldes hervorgerufen wird.

4. Die kreisförmige Kolbenmembran.

Die Berechnung des Schallfeldes einer Kolbenmembran macht für beliebige Aufpunkte *in der Nähe* der Membran beträchtliche Schwierigkeiten. Wir untersuchen daher zunächst den Fall, wo der Aufpunkt auf der Mittelachse der Membran liegt; dann läßt sich die Rechnung sehr einfach durchführen¹. Da $w(x, y)$ konstant ($= w_0$) sein soll, ist die Berechnung des Integrals:

$$J = \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF$$

erforderlich.

Führen wir für das Flächenelement dF Polarkoordinaten ϱ, φ ein, so ist $dF = \varrho d\varrho d\varphi$ und wegen $r^2 = \varrho^2 + z^2$ ist: $\varrho d\varrho = r dr$. (Abb. 50.)

Dann folgt:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho d\varrho \frac{e^{-ikr}}{r} = 2\pi \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} e^{-ikr} r dr = -\frac{2\pi}{ik} [e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}} - e^{-ikz}]. \quad (110)$$

¹ BACKHAUS, H., u. F. TRENDELENBURG: Über die Richtwirkung von Kolbenmembranen. Z. techn. Phys. 7, 630 (1926).

Unter Benutzung der leicht abzuleitenden, Beziehung:

$$e^{-i\alpha} - e^{-i\beta} = -2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

ergibt sich:

$$J = 2\lambda \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\} e^{-i \frac{k}{2} \{\sqrt{R^2 + z^2} + z\}}$$

Setzt man dies ein, so folgt unter Berücksichtigung von (11):

$$p = 2c \cdot \sigma \cdot \dot{w}_0 \cdot \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\} \cdot e^{i \left[\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2} (\sqrt{R^2 + z^2} + z) \right]}. \quad (111)$$

Die relative Schalldruckamplitude ist also:

$$\frac{p}{c\sigma} = 2 \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] \right\}.$$

Daraus folgt, daß $p/c \cdot \sigma$ den Wert Null für

$$k\sqrt{R^2 + z^2} - kz = 2\pi, 4\pi, \dots$$

den Wert 2 für:

$$k\sqrt{R^2 + z^2} - kz = \pi, 3\pi, \dots$$

erhält.

Bezeichnet man die zu diesen Extremwerten gehörenden z mit z_0 und z_m , so sind die Nullstellen z_0 gegeben durch:

$$z_0 = \frac{R^2 - n^2}{2n/\lambda} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (112)$$

und die Zweistellen z_m gegeben durch:

$$z_m = \frac{R^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{(2n + 1)/\lambda} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (113)$$

Mit größer werdendem Radius wächst die Anzahl der Null- und Zweistellen. Für Membranen, deren Radius kleiner als λ ist, kann ein Extremwert auf der Mittelachse nicht eintreten. In der Abb. 51 ist der vollständige Verlauf von $p/c\sigma$ für Aufpunkte auf der Mittelachse der Kolbenmembran dargestellt. Als Ordinate ist das Verhältnis z/R aufgetragen. Die 4 Kurven entsprechen den Werten $kR = 6$; $kR = 10$; $kR = 20$; $kR = 40$. Für Punkte mit hinreichend großem z soll nach der früher aufgestellten Behauptung (S. 5) die Formel (111) in (1) übergehen. Nach den Ausführungen auf S. 53 ist z hinreichend groß, wenn $\frac{\pi R^2}{\lambda z} \ll 1$ und $\frac{R}{z} \ll 1$ ist. Dann ist aber:

$$k\sqrt{R^2 + z^2} - kz = kz \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) - kz = \frac{\pi R^2}{\lambda z}$$

und

$$2 \sin \frac{1}{2} \frac{\pi R^2}{\lambda z} = \frac{\pi R^2}{\lambda z} = \frac{F}{\lambda \cdot z},$$

so daß in der Tat (111) in (1) (vgl. die Fußnote auf S. 3) übergeht. Würde man den Aufpunktsabstand z gleich 6 Radien wählen, so ergäben sich für $\frac{\pi R^2}{\lambda z}$ (oder für $\frac{(kR)^2}{2(kz)}$) in den Fällen $kR = 6, 10, 20, 40$ die Werte $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}$, so daß also der Aufpunktsabstand größer als 3 Membrandurchmesser höchstens im Falle $kR = 6$ als *hinreichend* groß angesehen werden kann. Dies gilt aber keineswegs im Fall $kR = 20$ oder gar $kR = 40$.

Es mag darauf hingewiesen werden, daß die Formel (111) auf den Fall verallgemeinert werden kann, wo die strahlende Fläche anstatt aus einer vollen Kreisfläche aus einem Kreisringsektor mit den Begrenzungsradien R_1 und R_2 und dem Zentriwinkel φ_0 besteht. Liegt der Aufpunkt dann senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreisringes, so gilt offenbar die zu (111) analoge Formel:

$$p = \frac{\varphi_0}{\pi} \cdot w_0 \cdot c \cdot \sigma \sin \left\{ \frac{k}{2} [\sqrt{z^2 + R_2^2} - \sqrt{z^2 + R_1^2}] \right\} e^{i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2} \{ \sqrt{z^2 + R_2^2} + \sqrt{z^2 + R_1^2} \} \right)}. \quad (114)$$

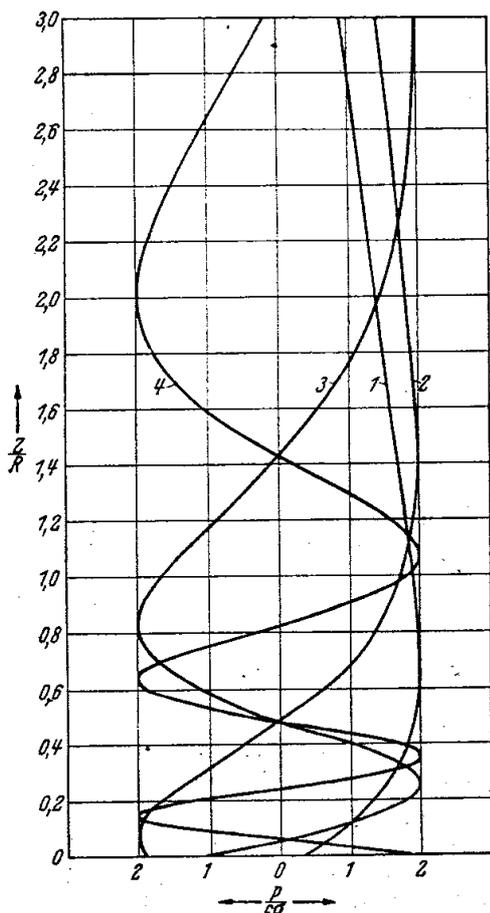


Abb. 51. Druckamplitude ($p/c\sigma$) auf der Mittelachse der kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius R .

- 1. $kR = 6$, 2. $kR = 10$, 3. $kR = 20$,
- 4. $kR = 40$.

Wenn es sich darum handelt, bei einer Kolbenmembran mit beliebiger Berandung für *einen* speziellen Aufpunkt den Schalldruck zu finden, so kann man nach Zerlegung der strahlenden Fläche in ent-

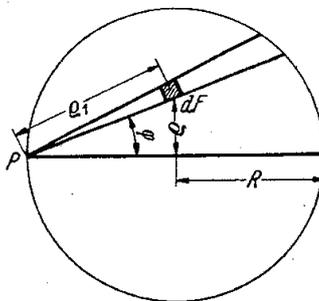


Abb. 52. Zur Berechnung des Schalldruckes am Rande der kreisförmigen Kolbenmembran.

sprechende Teilbereiche diese Formel anwenden, indem man die Wirkungen der einzelnen Teilflächen summiert. Man hat dabei nur darauf zu achten, daß die vernachlässigten Flächenstücke so klein sind, daß sie allein praktisch keinen Beitrag liefern. Die Unterteilung hängt also wesentlich von der Größe der Wellenlänge ab.

Die Berechnung des Integrals läßt sich nun noch einfach durchführen, wenn der Aufpunkt *auf dem Rand* der Membran liegt. Wählen wir den Aufpunkt P zum Anfangspunkt des Koordinatensystems mit den Polarkoordinaten ϱ_1 und φ , so ist (Abb. 52):

$$\begin{aligned} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} e^{-ik\varrho_1} d\varrho_1 = \frac{2}{ik} \int_0^{\pi/2} d\varphi [1 - e^{-ik2R \cos \varphi}] \\ &= \frac{\pi}{ik} - \frac{2}{ik} \int_0^{\pi/2} e^{-ik2R \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-ik2R \cos \varphi} d\varphi = J_0(2kR) - iH_0(2kR).$$

Dabei bedeutet J_0 die BESSELSche und H_0 die STRUWESche Funktion nullter Ordnung. Dann folgt¹:

$$p = c \cdot \sigma e^{i\omega t} \left[\frac{1 - J_0(2kR)}{2} + \frac{i}{2} H_0(2kR) \right]. \quad (115)$$

Mit Hilfe der vorliegenden Tabellen² für J_0 und H_0 können wir den Verlauf der Schalldruckamplitude am Rand der Membran in Abhängigkeit von $2\pi R/\lambda$ darstellen. In Abb. 53 ist außer dieser Darstellung noch der Verlauf der Schalldruckamplitude im Mittelpunkt eingezeichnet, der aus (111) wegen $z = 0$ durch

$$\frac{p}{\sigma c} = 2 \sin \frac{\pi R}{\lambda} \quad (116)$$

gegeben ist.

Der Verlauf der beiden Kurven zeigt ein bemerkenswertes verschiedenes Verhalten. Während die relative Schalldruckamplitude $p/\sigma c$ im Nullpunkt mit wachsendem Membranradius periodisch zwischen den Werten Null und Zwei schwankt, nähert sich $p/\sigma c$ im Randpunkt der Membran mit wachsendem Radius immer mehr

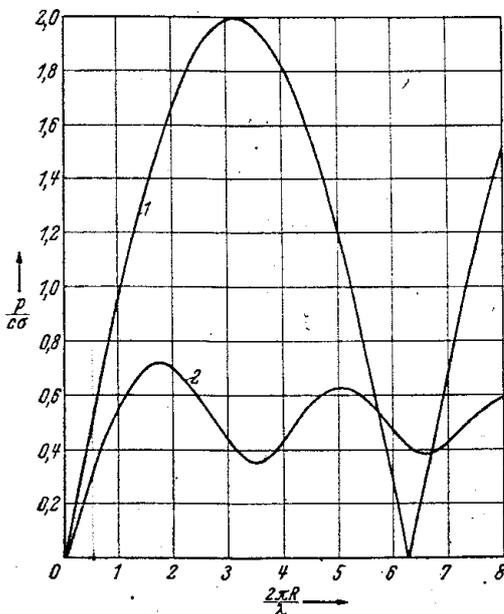


Abb. 53. Druckamplitude ($p/\sigma c$) im Mittelpunkt (1) und am Rande (2) der kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius R .

¹ MCLACHLAN, W.: On the Acoustic and Inertia Pressure on a vibrating Circular Disk. Phil. Mag. Ser. 7 1932 S. 1022.

² Theory of BESSEL Functions. Cambridge: G. N. Watson 1922.

dem Wert $\frac{1}{2}$. Bei oberflächlicher Betrachtung ist man leicht geneigt, anzunehmen, daß bei einer Kolbenmembran sich unmittelbar vor der Membran ein Schallfeld ausbildet, das mit wachsendem Membranradius R (für $R \gg \lambda$) dem Schallfeld einer ebenen Welle immer mehr entspricht. Das ist nach dem Vorhergesagten keineswegs der Fall. Ein ähnlicher Trugschluß liegt bekanntlich vor, wenn man eine ebene Welle senkrecht auf einen Schirm mit kreisrunder Öffnung fallen läßt und glaubt, daß man durch Verkleinern der Öffnung einen (immer enger begrenzten) akustischen „Strahl“ ausblenden kann, während in Wirklichkeit hinter dem Schirm mit abnehmendem Öffnungsradius ϱ ($\varrho \ll \lambda$) eine immer mehr (halb)-kugelförmige Ausbreitung stattfindet.

Wir hatten früher gesehen, daß der Schalldruck *in großer Entfernung* einfach berechnet werden kann, wenn die Geschwindigkeitsamplitude $w(\varrho)$ der kreisförmigen Membran in der Form gegeben ist:

$$w(\varrho) = a_0 + a_1 \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right) + a_2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right)^2 + \dots + a_n \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right)^n.$$

Dabei ist ϱ der Abstand vom Mittelpunkt und R der Membranradius. Wir wollen nun zeigen, daß in dem einfachen Fall $n = 1$ für Aufpunkte *auf der Mittelachse* und *am Rand* der Membran ebenfalls eine einfache Berechnung möglich ist. Wir setzen:

$$w(\varrho) = 1 - f \cdot \frac{\varrho^2}{R^2}. \quad (117)$$

Dann ist die entsprechende Druckamplitude p_f gegeben durch:

$$p_f = \frac{\rho}{c \sigma e^{i\omega t}} = \frac{i}{\lambda} \int_F \left(1 - f \frac{\varrho^2}{R^2}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dF.$$

Es genügt, die Druckamplituden p_0 (für $f = 0$) und p_1 (für $f = 1$) zu berechnen. Denn aus:

$$p_0 = \frac{i}{\lambda} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF \quad \text{und} \quad p_1 = \frac{i}{\lambda} \int_F \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2}\right) \frac{e^{-ikr}}{r} dF$$

folgt:

$$p_f = (1 - f) p_0 + f p_1.$$

Liegt der Aufpunkt *auf der Mittelachse* (Abb. 50) im Abstand z vom Mittelpunkt, so ist $\varrho^2 = r^2 - z^2$, und wegen $dF = r dr d\varphi$ folgt:

$$p_1 = \frac{2\pi i}{\lambda} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} e^{-ikr} dr - \frac{2\pi i}{\lambda R^2} \int_z^{\sqrt{R^2+z^2}} r^2 e^{-ikr} dr.$$

Wir finden daher für den Aufpunkt *auf der Mittelachse*:

$$p_1 = e^{-ikz} \left\{ 1 + \frac{2}{k^2 R^2} + \frac{2ikz}{k^2 R^2} \right\} - e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}} \frac{2}{k^2 R^2} \left\{ 1 + ik\sqrt{R^2+z^2} \right\} \quad (118)$$

und nach (110): $p_0 = e^{-ikz} - e^{-ik\sqrt{R^2+z^2}}$.

Liegt der Aufpunkt auf dem Rande der Membran, so ist (Abb. 52) wegen

$$\varrho^2 = R^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho_1 R \cos \varphi, \quad 1 - \frac{\varrho^2}{R^2} = \frac{2\varrho_1}{R} \cos \varphi - \frac{\varrho_1^2}{R^2},$$

$$p_1^{(r)} = \frac{2i}{\lambda} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} e^{-ikr} \left[\frac{2\varrho_1 \cos \varphi}{R} - \frac{\varrho_1^2}{R^2} \right] d\varrho_1.$$

Führen wir die Integration nach ϱ_1 aus, so folgt:

$$p_1^{(r)} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{kR} - i \cos \varphi - e^{-i2kR \cos \varphi} \left(\frac{1}{kR} + i \cos \varphi \right) \right\} d\varphi,$$

$$p_1^{(r)} = \frac{1}{k^2 R^2} - \frac{2i}{\pi kR} - \frac{1}{k^2 R^2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-i2kR \cos \varphi} d\varphi - \frac{i}{kR} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi e^{-i2kR \cos \varphi} d\varphi.$$

Unter Benutzung der Beziehungen¹:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-ix \cos \theta} d\theta = J_0(x) - iH_0(x),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} - H_1(x) - iJ_1(x)$$

folgt dann für den Aufpunkt am Rande:

$$p_1^{(r)} = \frac{1 - J_0(2kR)}{k^2 R^2} - \frac{J_1(2kR)}{kR} + i \left[\frac{H_0(2kR)}{k^2 R^2} + \frac{H_1(2kR)}{kR} - \frac{4}{\pi} \right],$$

$$p_0^{(r)} = \frac{1 - J_0(2kR)}{2} + \frac{i}{2} H_0(2kR). \quad (119)$$

Dabei bedeuten J_0 und J_1 die BESSELSchen Funktionen, H_0 und H_1 die STRUVESchen Funktionen nullter und erster Ordnung. Mit Hilfe

der vorliegenden Tabellen für J_0 , J_1 , H_0 , H_1 macht die Berechnung keine Schwierigkeiten.

Der Schalldruckverlauf auf der Mittelachse ist im Fall $kR = 10$ für $w = 1 - f \cdot \varrho^2 / \lambda^2$, ($f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$) in der Abb. 55 und 56 dargestellt. Die entsprechenden Geschwindigkeitsamplituden $w = 1 - f \cdot \varrho^2 / R^2$

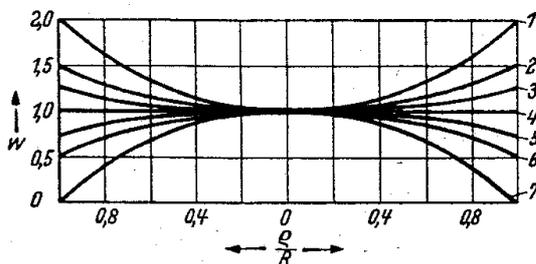


Abb. 54. Die Geschwindigkeitsamplituden $w = 1 - f \cdot \varrho^2 / R^2$ ($f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$).

($f = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$) sind in Abb. 54 gezeichnet. Ferner ist der Schalldruckverlauf im Mittelpunkt und am Rande für $w = 1 - \varrho^2 / R^2$

¹ MC LACHLAN. W.: BESSEL Functions for Engineers, S. 167.

und $w = 1 - \frac{1}{2} \rho^2/R^2$ in Abhängigkeit von kR in den Abb. 57 und 58 zur Darstellung gebracht.

Diese beiden Fälle: Aufpunkt auf der Mittelsenkrechten und Aufpunkt auf dem Rand der kreisförmigen Kolbenmembran sind die einzigen, bei denen die Auswertung des Integrals allgemein möglich ist, d. h. auf bekannte Funktionen führt, die in Tabellen vorliegen.

Wenden wir uns jetzt der allgemeinen Berechnung des Schallfeldes einer kreisförmigen Kolbenmembran¹ zu, so wollen wir das Integral $\int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF$ in seinen reellen und imaginären Anteil zerlegen.

Wir erhalten dadurch:

$$\left. \begin{aligned} p &= c \cdot \sigma \\ \cdot w_0 e^{i\omega t} (p_a + i p_m), \end{aligned} \right\} (120)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} p_a &= \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\sin kr}{r} dF, \\ p_m &= \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{\cos kr}{r} dF \end{aligned} \right\} (121)$$

ist. Das ist deshalb zweckmäßig, weil die relativen Schalldruckkomponenten p_a und p_m ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen. Ist beispielsweise die Wellenlänge so groß, daß $2\pi r/\lambda \ll 1$, so geht p_a gegen Null, d. h. es über-

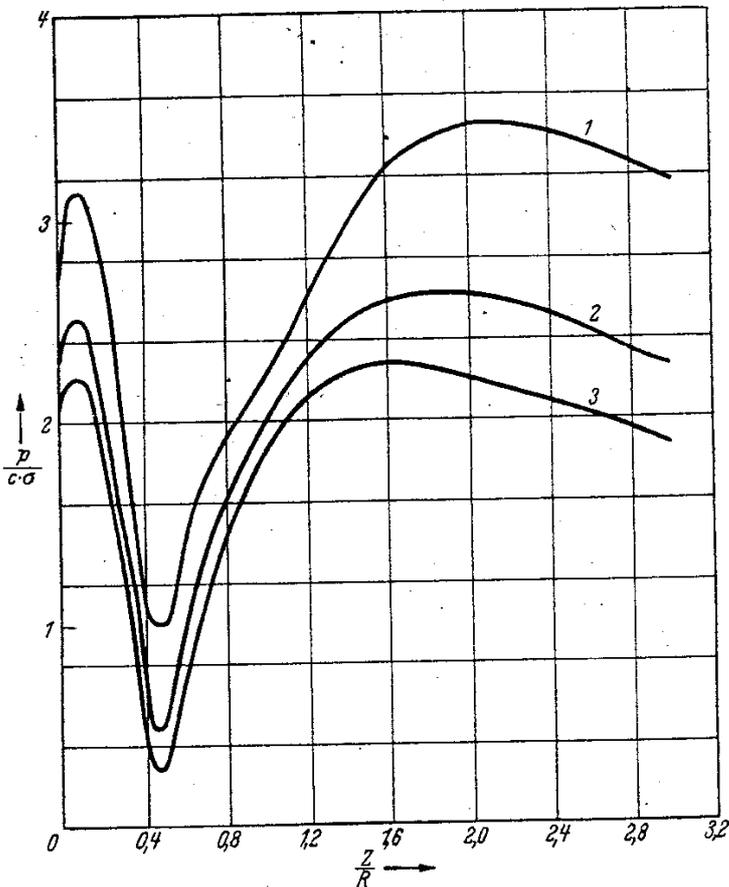


Abb. 55. Druckamplitude ($p/c\sigma$) auf der Mittelachse für die Geschwindigkeitsamplitude $w = 1 - f \cdot \rho^2/R^2$
1. $f = -1$; 2. $f = -\frac{1}{2}$; 3. $f = -\frac{1}{4}$.

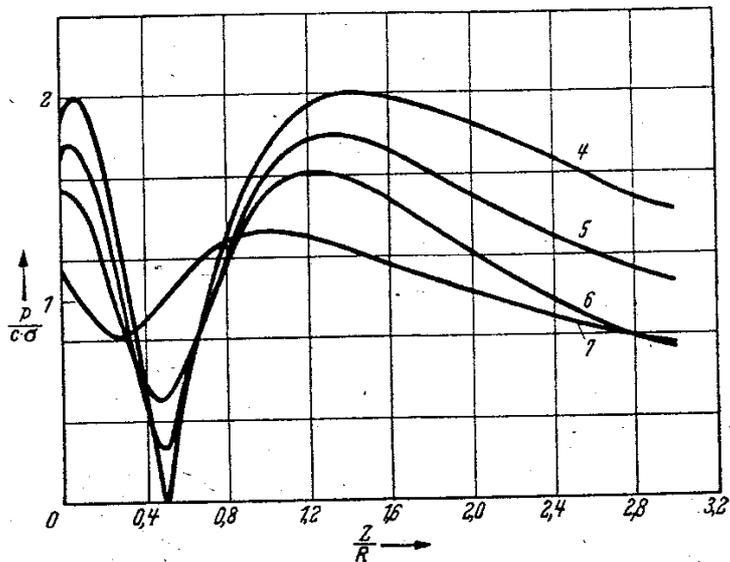


Abb. 56. Druckamplitude ($p/c\sigma$) auf der Mittelachse für die Geschwindigkeitsamplitude $w = 1 - f \cdot \rho^2/R^2$
4. $f = 0$, 5. $f = \frac{1}{4}$, 6. $f = \frac{1}{2}$, 7. $f = 1$.

¹ Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 12 (1935) S. 16–30.

wiegt die Komponente p_m , die mit der Schallgeschwindigkeitsamplitude $w = w_0 e^{i\omega t}$ eine Phasenverschiebung von 90° besitzt. Physikalisch be-

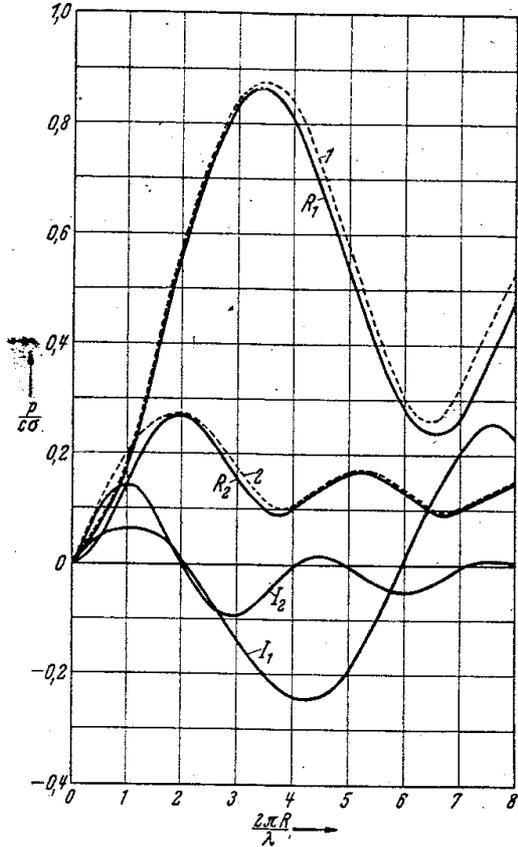


Abb. 57. Druckamplitude im Mittelpunkt (1) und im Randpunkt (2) bei der Schwingungsform $w = 1 - q^2/R^2$ und die entsprechenden Komponenten $(R_1, J_1), (R_2, J_2)$.

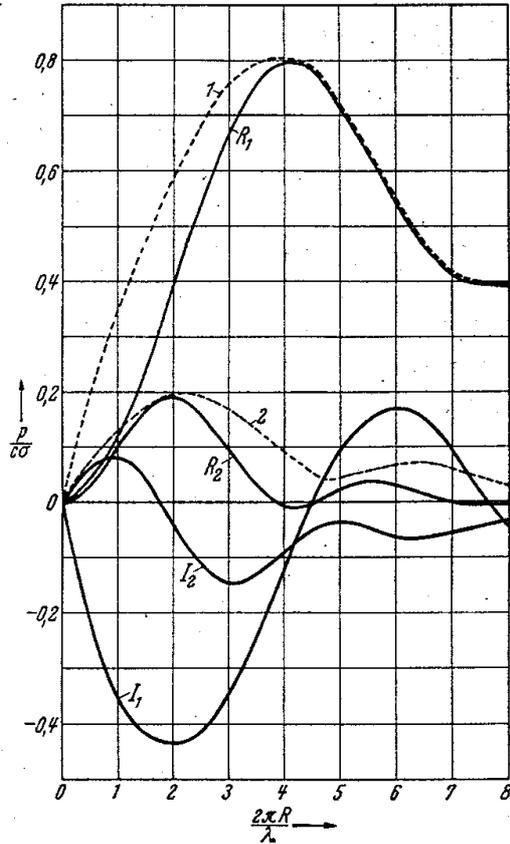


Abb. 58. Druckamplitude im Mittelpunkt (1) und im Randpunkt (2) bei der Schwingungsform $w = 1 - \frac{1}{2} q^2/R^2$ mit den entsprechenden Komponenten $(R_1, J_1), (R_2, J_2)$.

deutet dies, daß die Membran auf das Schallfeld fast wattlos arbeitet, so daß die Membran eine tote Masse hin und her bewegt, ohne praktisch Schall abzustrahlen.

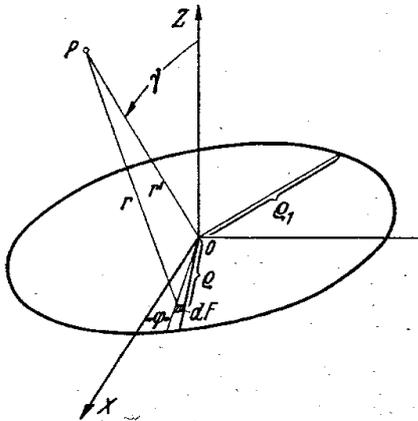


Abb. 59. Zur Berechnung der kreisförmigen Kolbenmembran.

Um die Integrale (121) auswerten zu können, müssen wir zunächst die veränderliche Größe r mit dem (durch seine Polarkoordinaten ϱ, φ bestimmten) entsprechenden Flächenelement in Beziehung setzen. Bezeichnen wir den Winkel, den die Aufpunktsgerade OP mit der z -Achse bildet, durch γ , den Abstand des Aufpunktes P von O mit r_1 und von dem Flächenelement dF mit r , so ergibt sich:

$$r = \sqrt{r_1^2 + \varrho^2 - 2r_1\varrho \cos\varphi \sin\gamma}. \quad (122)$$

Dabei ist der Aufpunkt P in der Abb. 59 in der XZ -Ebene angenommen, was offenbar wegen der Symmetrieverhältnisse keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die Integrale (121) nehmen dann die Form an:

$$p_a = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_1} \varrho d\varrho \frac{\sin kr}{r}, \quad p_m = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_1} \varrho d\varrho \frac{\cos kr}{r}, \quad (123)$$

wobei der Wert von r aus (122) eingesetzt gedacht ist. Da eine Integration in geschlossener Form allgemein nicht möglich erscheint, wird man durch Reihenentwicklung versuchen, den Integranden so umzuformen, daß die Integrationsvariablen getrennt auftreten. Das gelingt durch eine Reihenentwicklung, deren Glieder durch Kugelfunktionen und durch BESSELSche Funktionen gebildet werden. Und zwar gelten folgende Beziehungen¹:

$$\frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}} = \frac{1}{x \cdot y} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) S_n(x) S_n(y) P_n(\cos \vartheta), \quad (124)$$

$$\frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \vartheta}} = \begin{cases} \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) S_n(x) C_n(y) P_n(\cos \vartheta), & (x \leq y) \quad (125) \\ \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) C_n(x) S_n(y) P_n(\cos \vartheta). & (x \geq y) \quad (126) \end{cases}$$

Dabei ist $P_n(\cos \vartheta)$ die LEGENDRESche Kugelfunktion und

$$S_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad C_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} x J_{-n-\frac{1}{2}}(x), \quad (127)$$

wobei J die BESSELSchen Funktionen bedeuten. Diese Funktionen lassen sich für kleine n als rationale Funktionen von x , $\sin x$ und $\cos x$ verhältnismäßig einfach darstellen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} S_0(x) &= \sin x, & C_0(x) &= \cos x, \\ S_1(x) &= \frac{\sin x}{x} - \cos x, & C_1(x) &= \sin x + \frac{\cos x}{x}, \\ S_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x, & C_2(x) &= \frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \cos x, \\ S_3(x) &= \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \sin x & C_3(x) &= \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \sin x \\ &\quad - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \cos x, & &\quad + \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \cos x, \end{aligned} \right\} (128)$$

¹ WATSON, G. N.: Theory of BESSEL Functions, S. 366. Cambridge 1922.

wobei zwischen den $S_n(x)$ und $C_n(x)$ die wichtige Beziehung

$$S_n(x)C_{n+1}(x) - S_{n+1}(x)C_n(x) = 1 \quad (129)$$

besteht¹.

Unter Verwendung der Reihen in (124, 125) und (126) können wir nun die Integrale (123) berechnen. Wir führen zunächst die Integration nach φ gliedweise aus. Dabei benutzen wir die aus der Theorie der Kugelfunktion bekannte Beziehung:

$$\int_0^{2\pi} P_{2n+1}(\cos\varphi \sin\gamma) d\varphi = 0; \int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos\varphi \sin\gamma) d\varphi = 2\pi P_{2n}(0)P_{2n}(\cos\gamma). \quad (130)$$

Daraus folgt, daß alle ungeraden Glieder fortfallen. Und es ergibt sich

$$p_a = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) S_{2n}(kr_1) \int_0^{k\rho_1} S_{2n}(x) dx, \quad (131)$$

$$p_m = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) C_{2n}(kr_1) \int_0^{k\rho_1} S_{2n}(x) dx. \quad (132)$$

Diese gliedweisen Integrationen sind erlaubt, so lange die Reihen (124) und (125) gleichmäßig konvergent sind. Während dies für (124) stets der Fall ist, gilt dies für (125) nur für $x \leq y$. Das heißt: Während die Entwicklung (131) ohne jede Einschränkung, d. h. für beliebige Lagen des Aufpunktes gilt, hat (132) nur Gültigkeit, wenn der *Aufpunktsabstand größer als der Membranradius* ist. Für die in der Nähe der Membran liegenden Aufpunkte müssen wir eine andere Entwicklung für p_m suchen. Um im Fall $r_1 < \rho_1$ die Berechnung durchzuführen, denken wir uns die Membran vom Radius ρ_1 in eine kleinere kreisförmige vom Radius r_1 und eine kreisringförmige von der Breite $\rho_1 - r_1$ zerlegt. Bezeichnen wir die beiden entstandenen Bereiche mit F_1 und F_2 , so zerfällt das Integral über die Fläche F in zwei Summanden. Für den ersten Summand gilt die Entwicklung (132), nur tritt an Stelle der oberen Integrationsgrenze $k\rho_1$ jetzt kr_1 . Für das Gebiet F_2 ist jetzt aber die Formel (126) anzuwenden, so daß für p_m bei einem *Aufpunktsabstand kleiner als der Membranradius* folgende Entwicklung gültig ist:

$$p_m = \frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos\gamma) \times \left[C_{2n}(kr_1) \int_0^{kr_1} S_{2n}(x) dx + S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\rho_1} C_{2n}(x) dx \right]. \quad (133)$$

Für die praktische Anwendung der Formeln ist die tabellarische Berechnung der Funktionen P_n , S_n , C_n , $\int_0^x S_{2n}(x) dx$, $\int_0^x C_{2n}(x) dx$ erforder-

¹ NIELSEN, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. S. 23.

derlich. Für die Kugelfunktionen $P_n(\cos\gamma)$ sind die Tabellen für die Werte n von 0 bis 20 und für $\gamma = 0^\circ, 5^\circ \dots 90^\circ$ angegeben¹. Die Funktionen $S_n(x)$, $C_n(x)$ liegen für die Werte von x kleiner als 2^2 und für die ganzzahligen Werte $x = 1, 2, 3, \dots 10^3$, und für die Zwischenwerte $x = 2,2; 2,4; \dots 9,8^4$ berechnet vor. Die Tabellen für $\int_0^x S_{2n}(x) dx$, $\int_0^x C_{2n}(x) dx$ sind für $n = 0, 1, 2, \dots 10$ und $x = 1,1,25, 1,5 \dots 10$ im Anhang angegeben. Für die Berechnung der letzteren ist für kleine x die Reihenentwicklung nach x zweckmäßig. Diese ergibt sich ohne weiteres durch gliedweise Integration der bekannten Reihe für $S_{2n}(x)$ und $C_{2n}(x)$. Und zwar folgt

$$\int_0^x S_{2n}(x) dx = \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} \times \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{x^2}{2(2n+4)(4n+3)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+6)(4n+3)(4n+5)} - \dots \right), \quad (134)$$

$$\int_0^x C_{2n}(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n-1)}{x^{2n-1}} \times \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{x^2}{2(2n-3)(4n-1)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-5)(4n-1)(4n-3)} + \dots \right). \quad (135)$$

Für größere x ist es zweckmäßiger, die Integralfunktionen auf die einfachen Funktionen $S_n(x)$ und $C_n(x)$ zurückzuführen. Dazu gehen wir aus von der Gleichung⁵:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^p J_{\nu-p}(x) = \Gamma(\nu+1) \sum_{s=0}^p (-1)^s \frac{\binom{p}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^s J_{\nu+s}(x)}{\Gamma(\nu+s-p+1)}. \quad (136)$$

Setzen wir: $\nu = -n - \frac{1}{2}$, $p = n$, $s = m$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (-1)^n x^{\frac{1}{2}} J_{-2n-\frac{1}{2}}(x) \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2n+1)(2n+3) \dots (4n-2m-1) x^{m-n+\frac{1}{2}} J_{m-n-\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

Daraus finden wir durch gliedweises Integrieren unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\int x^{p+1} J_p(x) dx = x^{p+1} J_{p+1}(x)$$

¹ Phil. Trans. roy. Soc. Lond. Bd. 203 (1904) S. 100.

² Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1916 S. 97—107; 1922 S. 263—270.

³ Rep. Brit. Assoc. adv. Sci. 1914 S. 87—102.

⁴ Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 15 (1938) S. 73.

⁵ NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktion, S. 269. Leipzig 1904.

die gewünschte Beziehung:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x C_{2n}(x) dx &= S_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{C_0(x)}{x} \\ &\quad - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{C_1(x)}{x^2} + \dots \\ &\quad - (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \dots (4n-1) \frac{C_{n-1}(x)}{x^n}. \end{aligned} \quad (137)$$

Zur Bestimmung von $\int_0^x S_{2n}(x) dx$ gehen wir aus von der Formel¹;

$$\frac{J_\nu(x)}{p!} = \sum_{s=0}^p \frac{(-1)^{p-s}}{(p-s)!} \binom{\nu-p-s}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s J_{\nu-2p+s}(x)$$

und erhalten für: $\nu = 2n + \frac{1}{2}$, $p = n$, $s = m$

$$J_{2n+\frac{1}{2}}(x) = n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \binom{n+\frac{1}{2}+m-1}{m} \left(\frac{2}{x}\right)^m J_{2m+\frac{1}{2}}(x);$$

daraus finden wir durch gliedweises Integrieren unter Berücksichtigung von:

$$\int_0^x x^{-(p+\frac{1}{2})+1} J_{p+1}(x) dx = -\frac{J_{p-\frac{1}{2}}(x)}{x^{p-\frac{1}{2}}}$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx &= -C_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{S_0(x)}{x} \\ &\quad - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{S_1(x)}{x^2} + \dots \\ &\quad - (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \dots \frac{(4n-1) S_{n-1}(x)}{x^n} - K. \end{aligned} \quad (138)$$

Dabei ist die Konstante K so zu bestimmen, daß die rechte Seite von (138) für $x = 0$ zur Null wird.

Wir erhalten dann wegen

$$C_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{S_{m-1}(x)}{x^m} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1} \quad (\text{für } x = 0)$$

den Wert von K durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} K &= -1 + \binom{n}{1} (2n+1) - \binom{n}{2} \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \cdot 3} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}. \end{aligned} \quad (139)$$

¹ Fußnote 5 auf S. 71.

Für den Ausdruck auf der rechten Seite finden wir den Wert:

$$(-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}.$$

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^x S_{2n}(x) dx &= (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \\ &- C_0(x) + \binom{n}{1} (2n+1) \frac{S_0(x)}{x} - \binom{n}{2} (2n+1)(2n+3) \frac{S_1(x)}{x^2} + \dots \\ &- (-1)^n \binom{n}{n} (2n+1)(2n+3) \dots (4n-1) \frac{S_{n-1}(x)}{x^n}. \end{aligned} \quad (140)$$

Wir wollen nun zunächst die Formeln anwenden, wenn der Aufpunkt unmittelbar vor der Membran angenommen wird. Dann ist:

$$\cos \gamma = 1, \quad P_{2n}(1) = 1 \quad \text{und} \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

einzusetzen; der Membranradius ϱ_1 soll für sechs verschiedene Werte durch: $k\varrho_1 = 0,5; 2; 4; 6; 8; 10$ vorgegeben sein, während der Aufpunkt kontinuierlich jedesmal alle Werte von $r_1 = 0$ bis $r_1 = \varrho_1$ unmittelbar vor der Membran durchläuft. Bei der Berechnung machen wir davon Gebrauch, daß der von den inneren Flächenelementen ($\varrho \leq r_1$) herrührende Anteil einfach nach Formel (115) gefunden wird, so daß wir für p_a und p_m nur noch den vom ringförmigen Bereich herrührenden Anteil:

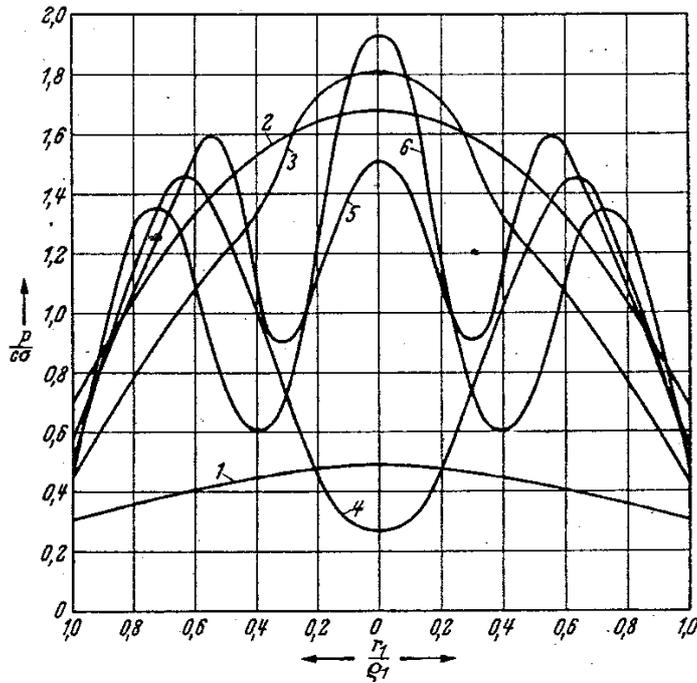


Abb. 60. Schalldruckamplitude ($p/c\sigma$) unmittelbar vor der kreisförmigen Kolbenmembran (Radius ϱ_1).
 1. $k\varrho_1 = 0,5$, 2. $k\varrho_1 = 2$, 3. $k\varrho_1 = 4$, 4. $k\varrho_1 = 6$
 5. $k\varrho_1 = 8$, 6. $k\varrho_1 = 10$.

und

$$\frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(1) S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\varrho_1} S_{2n}(x) dx$$

$$\frac{1}{kr_1} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(1) S_{2n}(kr_1) \int_{kr_1}^{k\varrho_1} C_{2n}(x) dx$$

hinzuzufügen haben.

Aus den beiden so erhaltenen Komponenten p_a und p_m ist dann $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$ berechnet und als Kurve aufgetragen. Dabei ist als Abszisse r_1/ϱ_1 gewählt, so daß die Abszisse 1 jedesmal dem Randpunkt der Membran entspricht (Abb. 60).

Man erkennt, daß nur für sehr kleine $k\rho_r$ ($k\rho_1 < \frac{1}{2}$) die Druckamplitude auf der ganzen Membranfläche einigermaßen konstant ist, daß dagegen mit größeren Werten von $k\rho_1$ eine immer stärkere Welligkeit auftritt, wobei der Wert im Mittelpunkt kontinuierlich zwischen Null und Zwei hin- und herpendelt, während der Randwert immer weniger um den Wert $\frac{1}{2}$ hin- und herschwankt.

Als Beispiel für die Berechnung bei beliebiger Lage des Aufpunktes soll der Gang der Rechnung für den Fall $k\rho = 10$, $kr = 6$ erläutert werden. Zunächst macht es keine Schwierigkeit die Größen

$$a_{2n} = (4n + 1) P_{2n}(0) S_{2n}(kr) \int_0^{k\rho} S_{2n}(x) dx$$

mit Hilfe der Tabellen im Anhang zu berechnen. Und zwar ergibt sich:

$2n =$	0	2	4	6	8	10
$a_{2n} =$	-0,086	+0,124	+1,785	-1,694	+0,222	-0,008

Wir finden daraus den Wert auf der Mittelachse ($\gamma = 0$):

$$\sum_{2n=0}^{10} a_{2n} = +0,342.$$

Dieser Wert ist aber nach den früheren Ausführungen (S. 61) durch: $\cos kr - \cos \sqrt{(kr)^2 + (k\rho)^2}$ gegeben. In der Tat ergibt sich

$$\cos 6 - \cos \sqrt{136} = 0,960 - 0,618 = +0,342.$$

Damit ist eine wichtige Kontrolle für die Richtigkeit der Koeffizienten a_{2n} gegeben. Ebenso berechnen wir die Koeffizienten b_{2n} für $p_m = \sum b_{2n} P_{2n}(\cos \gamma)$ und erhalten folgende Tabelle:

$2n =$	0	2	4	6	8
$(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$	+0,006	+1,317	+0,209	-0,631	+0,287
$(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{k\rho} C_{2n}(x) dx$	+0,012	+0,093	-1,727	-0,421	+0,640
$b_{2n} =$	+0,018	+1,410	-1,518	-1,052	+0,927
$2n =$	10	12	14	16	18
$(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$	-0,171	+0,121	-0,091	+0,074	-0,061
$(4n + 1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{k\rho} C_{2n}(x) dx$	-0,295	+0,174	-0,122	+0,093	-0,076
$b_{2n} =$	-0,466	+0,295	-0,213	+0,167	-0,137

Gegenüber den Koeffizienten a_{2n} sind hier die letzten Glieder der beiden Reihen etwa um eine Zehnerpotenz größer, so daß wir eine größere Abweichung der Summe $\sum b_{2n}$ von dem wahren Wert p_m zu erwarten haben. Um eine bessere Kontrolle mit den direkt zu findenden Werten:

$$\sin \sqrt{2(kr)^2} - \sin kr = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) \frac{C_{2n}(kr)}{kr} \int_0^{kr} S_{2n}(x) dx$$

und

$$\sin \sqrt{(kr)^2 + (k\varrho)^2} - \sin \sqrt{2(kr)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) \frac{S_{2n}(kr)}{kr} \int_{kr}^{k\varrho} C_{2n}(x) dx$$

zu erhalten, beachten wir, daß die Summanden der beiden Reihen in der Tabelle für größeres n immer weniger um einen Mittelwert oszillieren. Dem können wir dadurch Rechnung tragen, daß wir in beiden Reihen das letzte Glied durch 2 dividieren, also an Stelle $-0,061$ den Wert $-0,031$ und an Stelle $-0,076$ den Wert $-0,038$ setzen. Bezeichnen wir die sich so ergebende Summe mit \sum_1 und \sum_2 , so erhalten wir $\sum_1 = +1,091$ und $\sum_2 = -1,591$, während die wahren Werte:

$$\sin \sqrt{72} - \sin 6 = 1,087$$

und

$$\sin \sqrt{136} - \sin \sqrt{72} = -1,595$$

ergeben, so daß sich hier eine ausreichende Übereinstimmung ergibt. Freilich kann dieser Kunstgriff allgemein ($\gamma \neq 0$) für die Berechnung von $p_m = \sum b_{2n} P_{2n}(\cos \gamma)$ nicht angewandt werden, da hier wegen des Faktors $P_{2n}(\cos \gamma)$ keine *regelmäßigen* Oszillationen mehr vorliegen.

Trotzdem wird man auch hier mit einer Abweichung von höchstens 10% vom wahren Wert rechnen können. Diese Genauigkeit ist aber für akustische Berechnungen im allgemeinen als völlig ausreichend anzusehen. Unter Verwendung der Tafeln für die Kugelfunktionen werden dann die Größen $a_{2n} \cdot P_{2n}(\cos \gamma)$ und $b_{2n} \cdot P_{2n}(\cos \gamma)$ für $\gamma = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ usw. gefunden. So ergibt sich die folgende Tabelle. (Dabei rühren die für p_a und p_m angegebenen Werte von der ursprünglich auf 4 Dezimalen angestellten Rechnung her. Daher

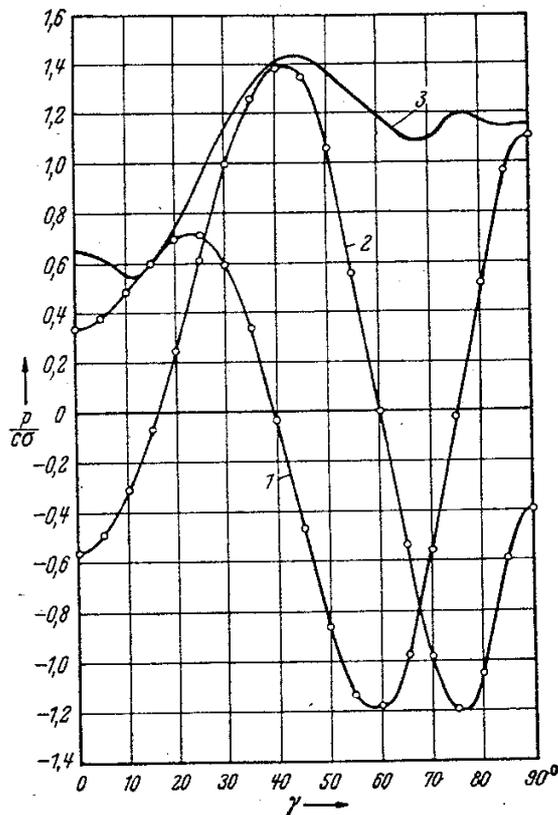


Abb. 61. Schalldruckamplitude ($p/c\sigma$) der kreisförmigen Kolbenmembran bei dem Radius ϱ_1 ($k\varrho_1 = 10$) und konstantem Aufpunktsabstand r ($kr = 6$).

$2n$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 5^\circ$	$\gamma = 10^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 20^\circ$	$\gamma = 25^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 35^\circ$	$\gamma = 40^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
0	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086
2	+0,124	+0,122	+0,118	+0,111	+0,102	+0,093	+0,077	+0,063	+0,047	+0,031
4	+1,785	+1,717	+1,539	+1,222	+0,847	+0,440	+0,042	-0,305	-0,569	-0,725
6	-1,694	-1,560	-1,191	-0,675	-0,122	+0,345	+0,634	+0,695	+0,548	+0,251
8	+0,222	+0,193	+0,116	+0,021	-0,056	-0,090	-0,075	-0,026	+0,031	+0,066
10	-0,008	-0,007	-0,003	+0,001	+0,003	+0,003	-0,001	-0,002	-0,002	-0,001
$p_a =$	+0,342	+0,379	+0,493	+0,597	+0,688	+0,705	+0,593	+0,339	-0,031	-0,463

$2n$	$\gamma = 50^\circ$	$\gamma = 55^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 65^\circ$	$\gamma = 70^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 80^\circ$	$\gamma = 85^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
0	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086	-0,086
2	+0,015	-0,001	-0,016	-0,029	-0,040	-0,049	-0,056	-0,064	-0,062
4	-0,762	-0,686	-0,516	-0,277	-0,007	+0,256	+0,474	+0,618	+0,669
6	-0,095	-0,389	-0,548	-0,531	-0,354	-0,073	+0,223	+0,446	+0,529
8	+0,065	+0,032	-0,016	-0,053	-0,062	-0,038	+0,005	+0,045	+0,061
10	+0,001	+0,002	+0,002	—	-0,002	-0,002	-0,001	+0,001	+0,002
$p_a =$	-0,862	-1,128	-1,179	-0,976	-0,551	-0,008	+0,559	+0,960	+1,115

$2n$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 5^\circ$	$\gamma = 10^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 20^\circ$	$\gamma = 25^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 35^\circ$	$\gamma = 40^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
0	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019
2	+1,410	+1,393	+1,345	+1,265	+1,160	+1,030	+0,880	+0,714	+0,535	+0,355
4	-1,518	+1,460	-1,293	-1,038	-0,721	-0,375	-0,035	+0,270	+0,484	+0,616
6	-1,052	-0,968	-0,740	-0,418	-0,075	+0,214	+0,393	+0,432	+0,340	+0,156
8	+0,927	+0,804	+0,484	+0,089	-0,234	-0,376	-0,314	-0,107	+0,129	+0,276
10	-0,466	-0,373	-0,149	+0,077	+0,187	+0,142	+0,003	-0,118	-0,138	-0,054
12	+0,295	+0,213	+0,035	-0,100	-0,104	-0,007	+0,080	+0,074	-0,006	-0,073
14	-0,214	-0,137	+0,014	+0,086	+0,034	-0,050	-0,055	+0,012	+0,055	+0,022
16	+0,167	+0,091	-0,036	-0,060	+0,013	+0,056	+0,001	-0,043	-0,011	+0,036
18	-0,137	-0,061	+0,045	+0,031	-0,035	-0,021	+0,031	+0,016	-0,028	-0,012
$p_m =$	-0,569	-0,479	-0,276	-0,049	+0,244	+0,626	+1,003	+1,269	+1,379	+1,341

$2n$	$\gamma = 50^\circ$	$\gamma = 55^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 65^\circ$	$\gamma = 70^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 80^\circ$	$\gamma = 85^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
0	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019	+0,019
2	+0,169	-0,009	-0,176	-0,327	-0,457	-0,564	-0,641	-0,688	-0,705
4	+0,651	+0,584	+0,439	+0,235	+0,606	-0,217	-0,408	-0,526	-0,569
6	-0,059	-0,242	-0,339	-0,330	-0,220	-0,045	+0,139	+0,278	+0,329
8	+0,274	+0,132	-0,068	-0,224	-0,258	-0,158	+0,022	+0,187	+0,253
10	+0,064	+0,125	+0,088	-0,015	-0,102	-0,108	-0,030	+0,070	+0,114
12	-0,059	+0,015	+0,069	+0,047	-0,623	-0,067	-0,039	+0,031	+0,066
14	-0,039	-0,042	+0,012	+0,047	+0,016	-0,036	-0,037	+0,013	-0,045
16	+0,019	-0,029	-0,025	+0,021	+0,029	-0,013	-0,032	+0,004	+0,033
18	+0,027	+0,009	-0,026	-0,006	+0,026	+0,003	-0,025	-0,001	+0,025
$p_m =$	+1,066	+0,564	-0,007	-0,533	-0,964	-1,186	-1,032	-0,593	-0,393

weichen an einzelnen Stellen die p_a und p_m von den Summe der darüber stehenden Zahlen in der letzten Dezimale ab).

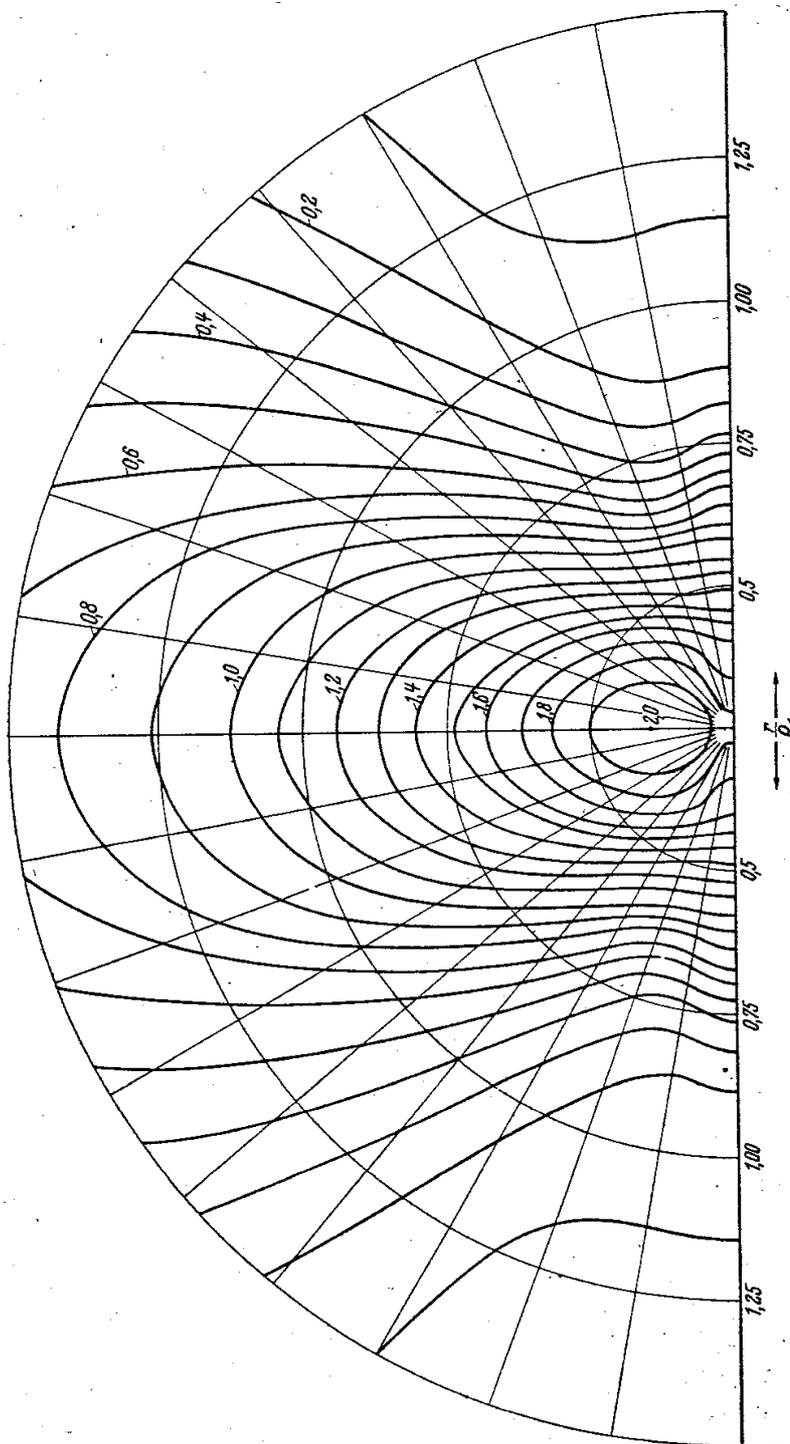


Abb. 62. Schallfeld ($p/c\sigma$) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ($\nu e_1 = 4$). / k

In der Abb. 61 sind die beiden Komponenten p_a und p_m zunächst einzeln dargestellt, da durch die stetige Aufeinanderfolge der berechneten Werte eine wertvolle Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung

gegeben ist. Schließlich ergibt sich durch geometrische Addition der entsprechenden Werte von p_a und p_m der vollständige Verlauf der relativen Schalldruckamplitude $p = \sqrt{p_a^2 + p_m^2}$ (s. Abb. 61).

Auf diese Weise wurden für 3 Kolbenmembranen, deren Radien durch $\frac{2\pi a_1}{\lambda} = 4, 6, 10$ gegeben waren, für eine so große Anzahl von Punkten des Nahfeldes die relativen Schalldruckamplituden $\sqrt{p_a^2 + p_m^2}$

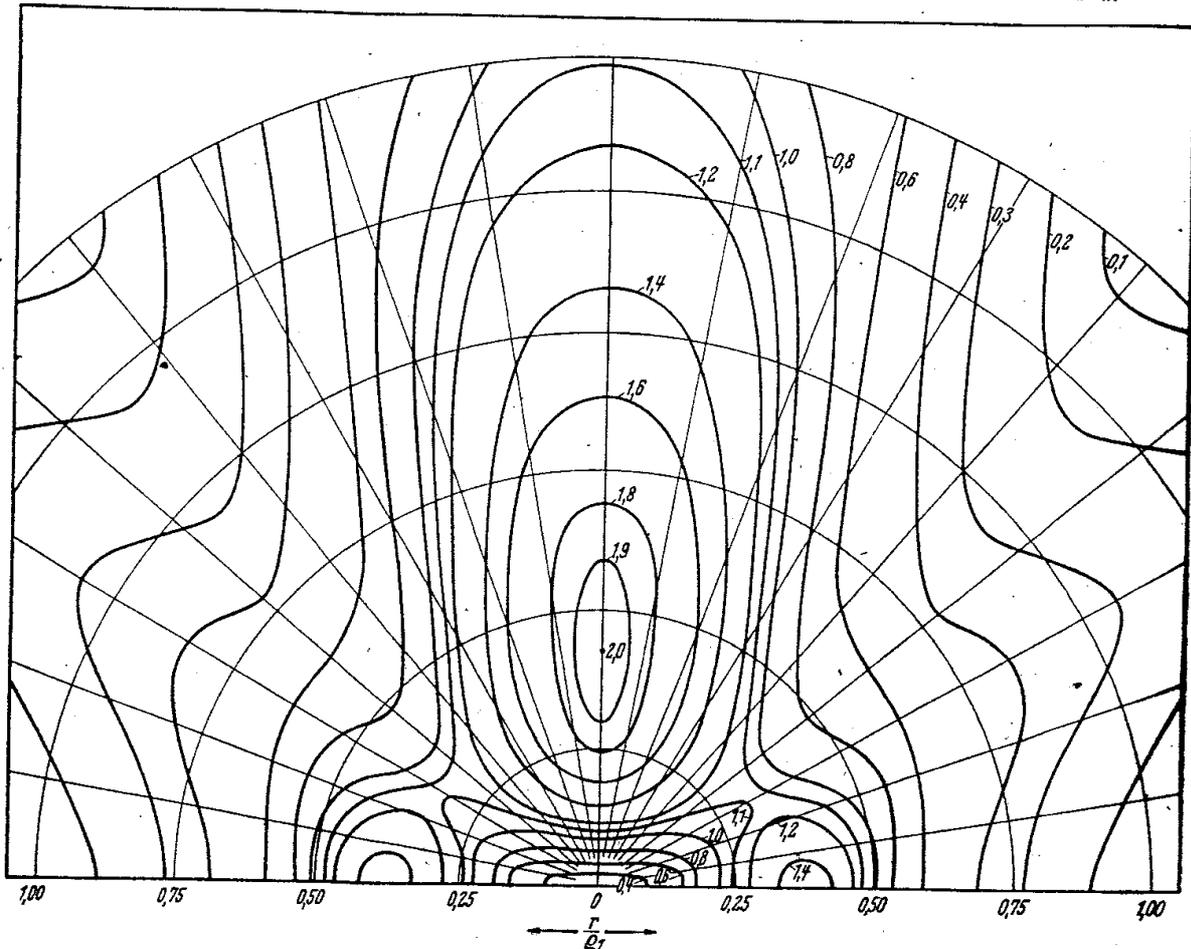


Abb. 63. Schallfeld ($p/c\sigma$) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ($ka_1 = 6$).

berechnet, daß durch Interpolation die Kurven konstanter Schalldruckamplituden eingezeichnet werden konnten. Das Ergebnis ist in den Abb. 62 bis 64 dargestellt. Dabei bedeuten die auf der horizontalen Achse angeschriebenen Zahlen die Werte r/a_1 , so daß auf dem Einheitshalbkreis die Punkte liegen, welche um den Membranradius vom Membranmittelpunkt entfernt sind. Man erkennt, daß der wesentliche Charakter des Nahfeldes durch die Lage der Null- und Zweiwerte (die sich nur auf der Mittelachse finden) bestimmt wird. Betrachten wir zunächst den Fall $ka_1 = 6$, so sehen wir, daß im Mittelpunkt der Membran die

Amplitude annähernd den Wert Null hat, auf der Mittelachse mit zunehmendem Abstand erst schneller und dann langsamer zum Punkt Zwei ansteigt und von da ab sehr allmählich abfällt. Außerhalb der Mittelachse liegen in der Höhe des Nullpunktes noch zwei Gipfel, die durch die Höhenkreise 1,4 gekennzeichnet sind. Außerhalb dieser Gipfel findet mit größerem Radius ein gleichmäßiger Abfall statt. Be-

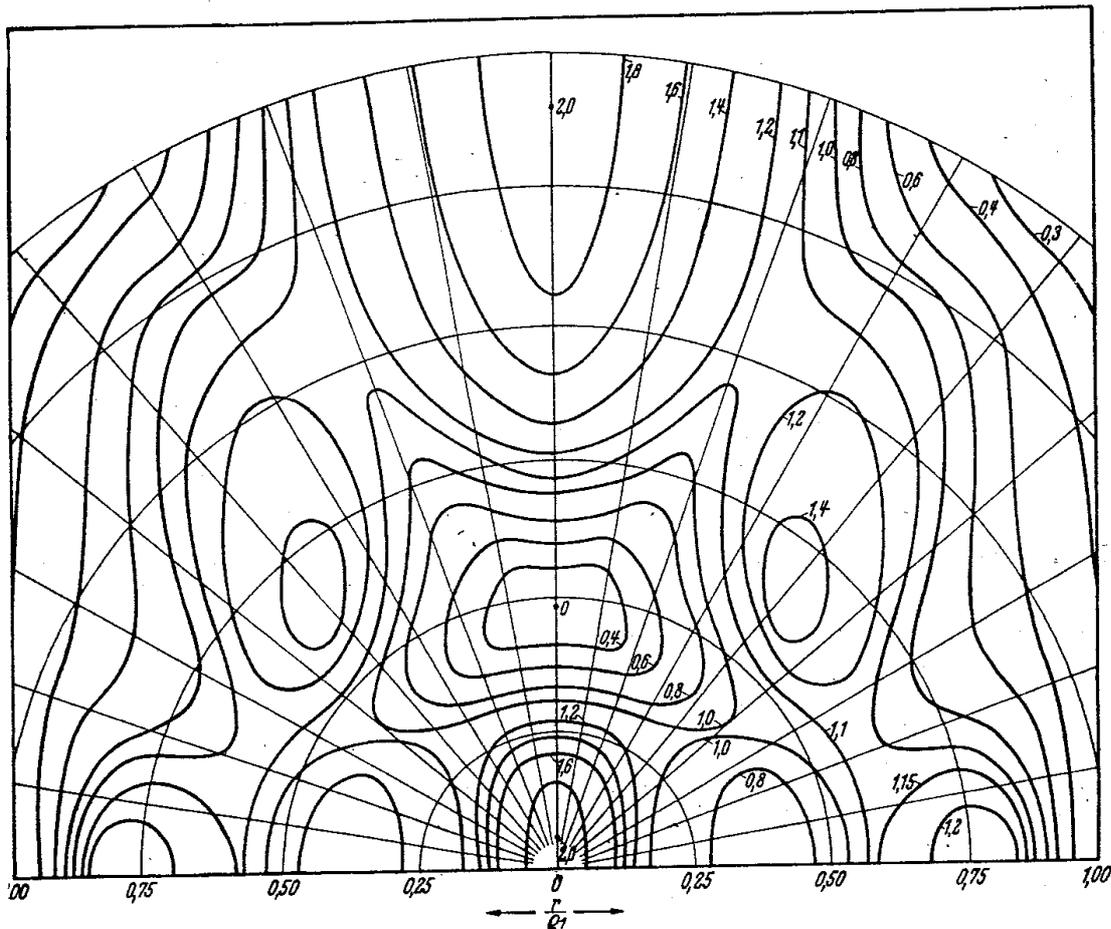


Abb. 64. Schallfeld ($p/c\sigma$) in der Umgebung der kreisförmigen Kolbenmembran ($k\rho_1 = 10$).

trachten wir nun zum Vergleich das Feld für $k\rho_1 = 10$, so ergibt sich eine auffallende Ähnlichkeit der Konfiguration des oberen Teiles dieses Schallfeldes mit dem vorigen. Denken wir uns durch den Nullwert auf der Mittelachse eine horizontale Gerade gezogen, so schneidet diese das Feld in zwei Teile, wobei der obere Teil außerordentlich ähnlich dem Gesamtfeld für $k\rho_1 = 6$ ist, wie es in den Abb. 63 dargestellt ist. Der untere Teil des Feldes $k\rho_1 = 10$ ist wesentlich verschieden, indem jetzt rechts und links von dem Zweipunkte je ein Minimum und ein Maximum neu in Erscheinung getreten ist.

Lassen wir nun den Radius der Kolbenmembran stetig weiter wachsen, so wissen wir (aus der einfachen Formel für die Punkte der Mittelachse), daß die Zwei- und Nullwerte immer zahlreicher werden und weiter nach oben wandern, wobei immer neue Null- und Zweiwerte im Nullpunkt der Membran entstehen. Nach dem oben Ausgeführten werden wir aber darüber hinaus zu erwarten haben, daß mit den nach oben wandernden Null- und Zweipunkten der Mittelachse auch die rechts und links liegenden Kurven konstanten Schalldruckes einfach mit nach oben wandern, ohne im wesentlichen ihren Charakter zu ändern. Wenn wir eine Membran mit beliebig großem Radius haben und markieren uns auf der Mittelachse die beiden letzten Zweiwerte der Amplitude, so werden wir erwarten können, daß das zugehörige Feld, welches sich zwischen den parallel zur Membran durch diese beiden Zweipunkte gelegten Ebenen befindet, in seinem Charakter mit dem in Abb. 64 dargestellten Feld übereinstimmt. Im übrigen wird man nach der Abb. 64 vermuten, daß wenn man von irgendeinem Zweipunkt der Mittelachse in vertikaler Richtung wandert, man ebenso viele Extremwerte passiert, als wenn man vom selben Zweipunkt in horizontaler Richtung wandert.

Dritter Teil.

Das Schallfeld des Kugelstrahlers.

5. Der einfache Kugelstrahler bestimmter Ordnung.

Bei den bisher behandelten Strahlern war eine wesentliche Voraussetzung die Existenz einer schallharten, starren, unendlichen, ebenen Wand. In der Nullage fiel die strahlende Fläche mit dieser Wand zusammen. Die Berechnung des Strahlungsvorganges war dabei durch die Berechnung eines Integrals über die strahlende Fläche gegeben. Bei den in den folgenden Kapiteln behandelten Aufgaben bildet die strahlende Fläche den Teil einer *schallharten, starren Kugel* von bestimmtem Radius. Hier liegt eine allgemeinere Aufgabe vor, da abgesehen von der Amplitude und der Ausdehnung der strahlenden Fläche, auch die Ausdehnung der starren Wand verändert werden kann. Während früher z. B. bei der kreisförmigen Kolbenmembran *eine* charakteristische Funktion $\left(2 \frac{J_1(x)}{x}, x = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma\right)$ genügte, um das Schallfeld bei beliebiger Aufpunktslage in großer Entfernung und beliebiger Membrangröße (im Verhältnis zu λ) vollständig zu übersehen, ist dies jetzt nicht mehr möglich. Andererseits gibt es jetzt ganz bestimmte Verteilungen der Geschwindigkeitsamplitude, für die die Lösung denkbar einfach wird. Dabei ist besonders wichtig, daß auch die Berechnung des Nahfeldes keine Schwierigkeit macht. Diese einfache Lösung liegt nun vor, wenn

die Geschwindigkeitsamplitude durch *eine* Kugelfunktion bestimmter Ordnung vorgegeben ist. Diese zunächst gekünstelt erscheinende Annahme der Geschwindigkeitsverteilung findet dann alsbald ihre Berechtigung in der Tatsache, daß eine beliebig vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung allgemein auf die durch eine Kugelfunktion gegebene zurückgeführt werden kann. Bei der Berechnung praktischer Aufgaben werden wir uns auf solche Vorgänge beschränken, die rotationssymmetrisch zu einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse sind. Die entsprechenden Kugelfunktionen sind dann durch die bekannten LEGENDRE'schen Funktionen

$P_n(\mu)$, $\mu = \cos \gamma$ $\left[P_0(\mu) = 1, P_1(\mu) = \mu, P_2(\mu) = \frac{1 \cdot 3}{2!} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \text{ usw.} \right]$ gegeben.

Unter einem Kugelstrahler *nullter* Ordnung verstehen wir eine pulsierende Kugel, bei der die einzelnen Elemente der Oberfläche mit konstanten Geschwindigkeitsamplituden komphas nach außen und nach innen schwingen (s. Abb. 1a). Die Geschwindigkeit auf der Kugel ist gegeben durch:

$$w = w_0 e^{i\omega t}.$$

Bei einem Kugelradius r_0 ist dann für einen Aufpunktsabstand r der Schalldruck vollständig bestimmt durch:

$$p_0 = p^{(0)} w_0 \frac{1 - ikr_0}{1 + k^2 r_0^2} e^{i[\omega t + \pi/2 - k(r-r_0)]}, \quad (141)$$

wobei zur Abkürzung $p^{(0)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{2\lambda r}$ gesetzt ist.

Daraus folgt die Schalldruckamplitude:

$$p_0 = p^{(0)} w_0 \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}} = \frac{c \sigma w_0}{kr} \frac{k^2 r_0^2}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}}. \quad (142)$$

Für $kr_0 \ll 1$ erhalten wir die früher angegebene Formel:

$$p_0 = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{2\lambda \cdot r} w_0.$$

Die relative Schalldruckamplitude $p_0/c\sigma w_0$ ist dann allgemein gegeben durch:

$$\frac{p_0}{c\sigma w_0} = \frac{1}{kr} \cdot \frac{k^2 r_0^2}{\sqrt{1 + k^2 r_0^2}}$$

und durch die beiden Größen kr und kr_0 bestimmt. Die Kurven konstanter Schalldruckamplitude werden also im räumlichen Schallfeld sehr einfach durch konzentrische Kugeln dargestellt. Solange $kr_0 \ll 1$ ist, wächst der Schalldruck quadratisch mit kr_0 , solange $kr_0 \gg 1$ ist, linear mit kr_0 .