

gleich Null wird. Dann wird die Formel (39) für  $\Re$  unbrauchbar. Doch läßt sich die Schwierigkeit ohne weiteres beheben, wenn man die Druckamplitude direkt nach (11) berechnet. Dann folgt:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \int_F w(x, y) e^{i k y \sin \gamma} dF$$

und für  $\gamma = 0$  ist:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \int_F w(x, y) dF = 0.$$

Das bedeutet also, daß wegen  $w_m = 0$  die Druckamplitude in hinreichender Entfernung auf der Mittelachse gleich Null wird. Und es

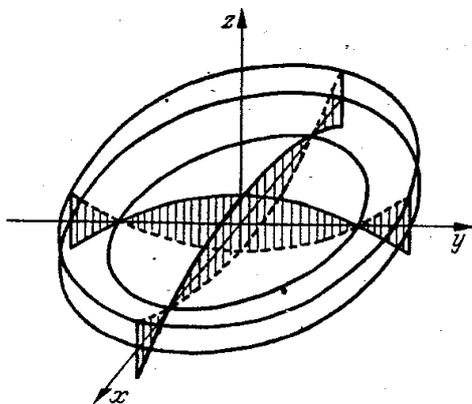


Abb. 21. Kreisförmige Membran mit dem Deformationsvolumen Null.

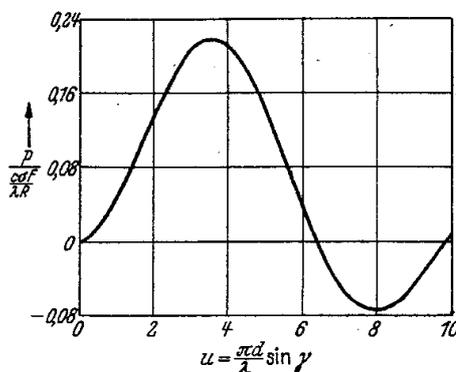


Abb. 22. Relative Schalldruckamplitude einer kreisförmigen Membran mit dem Deformationsvolumen Null.

ist klar, daß der Richtfaktor, der ja das Verhältnis der Druckamplitude in einer beliebigen Richtung zu der Druckamplitude auf der Mittelachse darstellt, seinen Sinn verliert. Im übrigen macht die Berechnung keine Schwierigkeit.

Ein entsprechendes Beispiel ist durch:

$w = 1 - 2 \varrho^2/r^2$ , also  $a_1 = -1$ ,  $a_1 = +2$ ,  $a_2 = a_3 \dots = 0$  gegeben (Abb. 21).

Hier ist  $w_m = 0$  und wir finden  $p$  durch:

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} \cdot F [\Re_1(u) - \Re_0(u)], \quad (40)$$

wobei  $u = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ ,  $\Re_0(u) = \frac{2J_1(u)}{u}$ ,  $\Re_1(u) = 2^2 \cdot 2 \cdot \frac{J_2(u)}{u^2}$

gesetzt ist.

Für kleine  $u$  erkennt man aus der Reihenentwicklung:

$$\Re_1(u) - \Re_0(u) = \frac{u^2}{2^2 \cdot 0! 3!} - \frac{u^4}{2^4 \cdot 1! 4!} + \frac{u^6}{2^6 \cdot 2! 5!} - \dots, \quad (41)$$

daß auch für Richtungen in der Nachbarschaft der Z-Achse die Wirkung der Membran außerordentlich gering ist. Der vollständige Verlauf von  $\Re_1(u) - \Re_0(u)$  ist in Abb. 22 dargestellt.

## b) Der Richtfaktor bei einem Geräusch.

In der Praxis sind bei den Schallquellen (z. B. unter Wasser), die gepeilt werden sollen, zwei wesentlich verschiedene Typen zu unterscheiden. Entweder handelt es sich um künstliche Schallquellen, die reine Töne aussenden sollen (Feuerschiffssender, Glocken, Signalsender auf Schiffen), oder um mehr oder weniger natürliche Schallquellen, die geräuschartigen Charakter besitzen und bei denen die Schallerzeugung meist unbeabsichtigt und unerwünscht vor sich geht (Schraubengeräusche, Maschinengeräusche).

Es liegt daher nahe zu untersuchen, wie sich die vorangegangenen Betrachtungen in solchen Fällen anwenden lassen. Dabei wollen wir den praktisch am häufigsten vorkommenden Fall zugrunde legen, wo eine Geräuschquelle vorliegt, aus deren kontinuierlichem Spektrum ein bestimmter, nach oben und unten begrenzter Bereich empfangen wird. Bekanntlich läßt sich dies durch elektrische Siebmittel ohne Schwierigkeiten verwirklichen. Dabei soll weiter vorausgesetzt sein, daß die Empfängeranordnung alle Frequenzen des in Frage kommenden Bereiches in der Hauptrichtung mit gleicher Intensität empfängt, d. h. daß der Sender keine Frequenz bevorzugt und auch im Medium auf dem Wege vom Sender zum Empfänger (Absorption, Reflexion) keine Frequenzabhängigkeit eintritt. Als Richtfaktor werden wir dann zweckmäßig den quadratischen Mittelwert:

$$\mathcal{G} = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \mathfrak{R}^2 dn} \quad (42)$$

definieren, wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Grenzen des Bereiches und  $\mathfrak{R}$  der früher definierte, von der Frequenz  $n$  abhängige, Richtfaktor bedeutet.

Wählen wir als einfachste Peileinrichtung zwei ungerichtete, im Abstand  $d$  befindliche Empfänger (klein zu allen in Frage kommenden Wellenlängen), so ist:

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \cos^2 \left( \frac{n \pi d}{c} \sin \gamma \right) dn}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin(x_2 - x_1)}{2(x_2 - x_1)} \cos(x_1 + x_2)}, \quad (43)$$

wobei zur Abkürzung:

$$n_1 \frac{\pi d}{c} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \gamma = x_1,$$

$$n_2 \frac{\pi d}{c} \sin \gamma = \frac{\pi d}{\lambda_2} \sin \gamma = x_2$$

gesetzt ist.

Man sieht, daß für  $x_2 = x_1$  die Formel (43) in den ursprünglichen Richtfaktor  $\mathfrak{R}_1$  in (14) übergeht. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{G}_{x_2 = x_1 = x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x} = \cos x.$$

Wir wollen nun zunächst den Verlauf des Richtfaktors untersuchen, wenn der durchgelassene Frequenzbereich gerade eine Oktave beträgt. Dazu setzen wir  $x_2 = 2x$ ,  $x_1 = x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$  und erhalten:

$$\mathfrak{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} \cos 3x}. \quad (44)$$

Aus der Abb. 23 sehen wir, daß der Richtfaktor jetzt wesentlich von dem früheren (für einen Ton, Abb. 7, Kurve 1) unterschieden ist. An

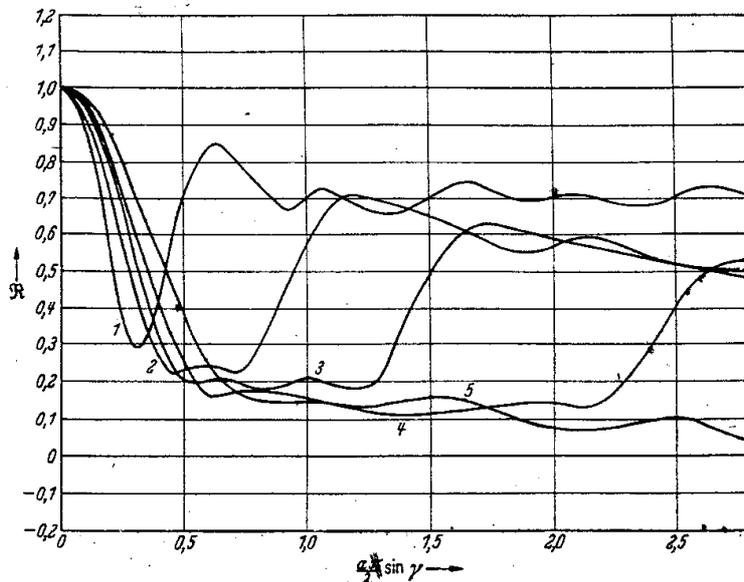


Abb. 23. Richtfaktor einer geraden Gruppe (Länge  $a$ ) bei Oktavenempfang: 1. 2 Empfänger; 2. 3 Empfänger; 3. 4 Empfänger; 4. 6 Empfänger; 5. dicht besetzt.

Stelle der mit wachsendem  $x$  periodisch auftretenden Null- und Einswerte tritt hier nur *ein* Hauptmaximum von der Größe Eins auf. Und mit größeren Werten  $x$  nähert sich die Kurve oszillierend immer mehr dem Wert  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Um den Einfluß der Empfängerzahl bei Oktavenempfang zu untersuchen, sind in Abb. 23 die Fälle dargestellt, wenn die Empfangseinrichtung aus 2, 3, 4, 6 und sehr vielen Empfängern besteht, wobei die gesamte Länge der Empfängergruppe konstant gleich  $a$  gesetzt ist. Man sieht, wie die Peilschärfe auch hier mit wachsender Empfängerzahl abnimmt, aber gleichzeitig der Pegel, dem mit wachsendem  $\frac{a \cdot \pi}{\lambda} \sin \gamma$  die Kurve zustrebt, immer mehr abnimmt, nämlich entsprechend der Empfängerzahl 2, 3, 4, 6 und sehr vielen auf:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ und } 0.$$

Allgemein ergibt sich für eine gerade Gruppe von  $n$  Empfängern in gleichem Abstand  $d$  für einen Frequenzbereich von  $\nu$  bis  $\nu + p\nu$ :

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin m p x}{m p x} \cos[(p+2)m x]}. \quad (45)$$

Um den Einfluß der Größe des durchgelassenen Frequenzbereiches zu erkennen, sind in der Abb. 24 die Fälle  $n = 6$ ,  $p = 0; 0,2; 0,5; 1; 3$  dargestellt. Man erkennt, daß die Größe des Durchlaßbereiches maß-

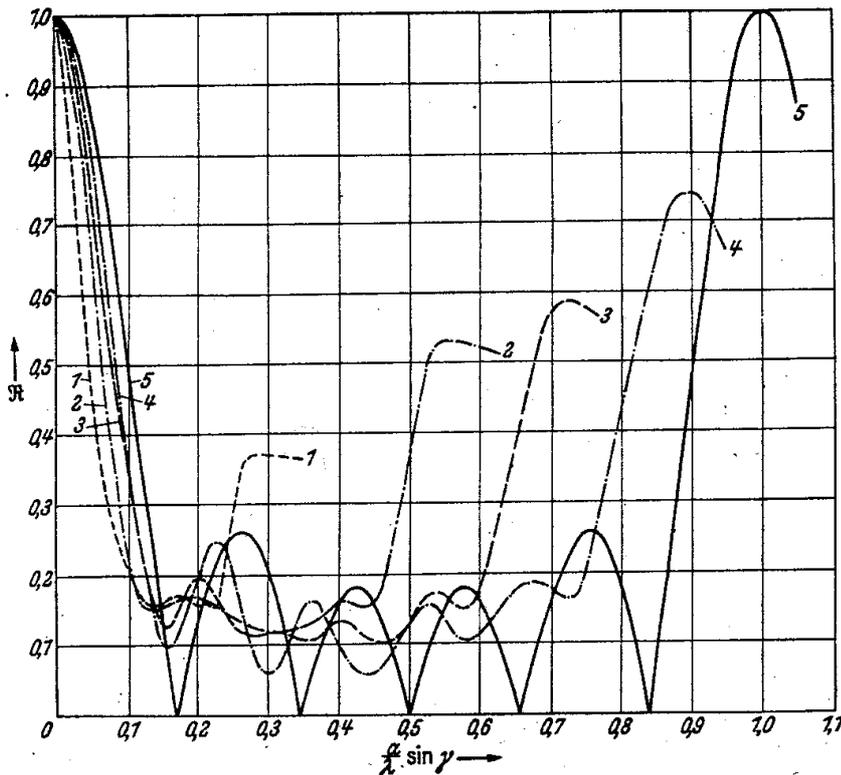


Abb. 24. Einfluß der Größe des Empfangsbereiches auf den Richtfaktor einer geraden Gruppe von 6 Empfängern.

gebend für die Höhe der Schwankung oberhalb  $\sqrt{\frac{1}{6}}$  ist, und zwar je größer der Durchlaßbereich ist, um so geringer ist die Schwankung. In der Abb. 24 entspricht:

- Kurve 1 dem Fall  $n = 6$   $p = 3$ ,
- Kurve 2 dem Fall  $n = 6$   $p = 1$ ,
- Kurve 3 dem Fall  $n = 6$   $p = 0,5$ ,
- Kurve 4 dem Fall  $n = 6$   $p = 0,2$ ,
- Kurve 5 dem Fall  $n = 6$   $p = 0$ .

Auf der Abszissenachse ist  $\frac{a}{\lambda} \sin \gamma$  aufgetragen, wobei  $a = 5d$  die Länge der Basis ist.

Als weitere Beispiele betrachten wir den Geräuschempfang für eine dichte Empfängeranordnung auf der Kreislinie und auf der Kreisfläche. Die entsprechenden Richtfaktoren sind:

$$\mathbb{G}_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} J_0^2\left(\frac{n\pi d}{c} \sin \gamma\right) dn} = \sqrt{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} J_0^2(x) dx}, \quad (46)$$

$$\mathbb{G}_3 = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \frac{4J_1^2\left(\frac{n\pi d}{c} \sin \gamma\right) dn}{n^2 \left(\frac{\pi d}{c} \sin \gamma\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{4J_1^2(x) dx}{x^2}}, \quad (47)$$

wobei wieder

$$x_1 = \frac{\pi d}{\lambda_1} \sin \gamma \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\pi d}{\lambda_2} \sin \gamma$$

gesetzt ist. Für den Oktavempfang ( $x_2 = 2x_1 = 2x$ ;  $x = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \gamma$ ) ist:

$$\mathbb{G}_2 = \sqrt{\frac{1}{x} \int_x^{2x} J_0^2(x) dx} \quad (48)$$

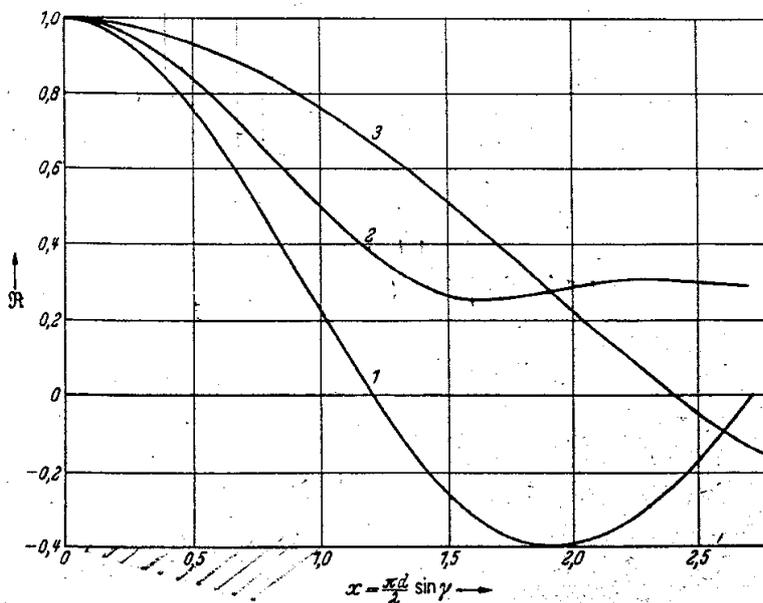


Abb. 25. Richtfaktor der dicht besetzten Kreislinie. 1. Für den Grundton (Wellenlänge  $\lambda$ ). 2. Für die Oktave (Wellenlänge von  $\lambda$  bis  $\lambda/2$ ). 3. Für den Oberton (Wellenlänge  $\lambda/2$ ).

in Abb. 25 dargestellt. Zum Vergleich sind die der oberen und unteren Oktavgrenze entsprechenden gewöhnlichen Richtfaktoren ebenfalls gezeichnet (Kurve 1 und 3).

### c) Bei künstlicher Kompensation.

Wenn es sich um die Aufgabe handelt, mit einer gegebenen Empfangsanordnung den Ort einer Schallquelle festzustellen, so kann dies geschehen, indem die Empfangsanordnung gedreht wird, bis das Maximum der Intensität am Anzeigeinstrument (Ohr) erreicht wird.

In den betrachteten Fällen, wo die Empfängeranordnung stets in einer Ebene angenommen war, ist dies der Fall, wenn die Empfängerenebene senkrecht zur Schallrichtung liegt. Dieselbe Gleichphasigkeit kann aber auch durch künstliche Kompensation ohne Drehung der Empfängeranordnung erreicht werden. Das geschieht durch veränderliche elektrische Verzögerungsketten, die zwischen der festen Empfängeranordnung und dem Anzeigeinstrument eingeschaltet sind. Jeder Stellung dieses Kompensators entspricht eine bestimmte Richtung im Raum (in der Peilebene), für welche die Empfangseinrichtung in Phase ist. Um die Richtung der Schallquelle zu finden, hat man bei festbleibender Empfangsanordnung jetzt nur den Kompensator zu drehen und an diesem den Peilwinkel abzulesen.

Die künstliche Kompensation durch elektrische Verzögerungsketten ist für das gerichtete Empfangen von außerordentlicher Bedeutung. Maßgebend für die Brauchbarkeit ist nicht zum wenigsten die Einfachheit und die Genauigkeit des Arbeitens der elektrischen Ketten. Diese bestehen aus einer Anzahl von im allgemeinen gleich gebauten Gliedern, die Selbstinduktion und Kapazität enthalten und so zusammengesetzt werden, daß die Selbstinduktionsspulen in Reihe, die Kondensatoren parallel geschaltet sind. Ist  $\mathcal{L}$  der Wert der Selbstinduktion und  $\mathcal{C}$  der Wert des Kondensators, so ist die pro Glied der Kette gegebene Verzögerung gleich  $\sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}}$ . Und zwar kann diese Verzögerung weitgehend frequenzunabhängig gemacht werden, wenn man nur dafür sorgt, daß die durch  $n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}}}$  definierte Grenzfrequenz genügend weit oberhalb des zu übertragenden Frequenzbereiches liegt. Damit wird dann erreicht, daß ein Geräusch ohne seinen Charakter zu ändern, pro durchlaufenes Glied einfach eine rein zeitliche Verzögerung erleidet.

Haben wir nun eine beliebige im Raum angeordnete Empfängergruppe, so kann für eine vorgeschriebene Peilebene die Kompensations-einrichtung in sehr einfacher Weise durch eine einzige derartige Verzögerungskette erreicht werden. Denken wir uns zunächst die Empfänger auf die Peilebene ( $X Y$ -Ebene) projiziert und ihre Koordinaten durch  $(x_1, y_1) (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$  gegeben, so ist klar, daß es für die Kompensation in der Peilebene nur auf diese Projektionspunkte ankommt. Anders ausgedrückt: Man kann die einzelnen Empfänger senkrecht zur Peilebene beliebig verschieben, ohne an der Wirkungsweise der Kompensation etwas zu ändern. Der natürliche Richtfaktor ist

dann, wenn wir uns der Einfachheit wegen auf 3 Empfänger beschränken, gegeben durch:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 e^{ik(x_n \cos \alpha + y_n \cos \beta)}, \quad (49)$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Richtungswinkel der Aufpunktsgeraden bedeuten. Kennzeichnen wir die Kompensationsrichtung in der Peilebene durch die Richtung der Kompensationsgeraden mit den Richtungswinkeln  $\varphi$  und  $\psi$ , so ist durch Anbringen der Verzögerungen der künstliche Richtfaktor gegeben durch:

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 e^{ik[x_n(\cos \alpha - \cos \varphi) + y_n(\cos \beta - \cos \psi)]}. \quad (50)$$

Lassen wir die Schallquelle, d. h. die Aufpunktsgerade ( $\alpha, \beta$ ), sich ändern, so daß der volle Umkreis beschrieben wird, so bekommt  $\mathfrak{R}_k$

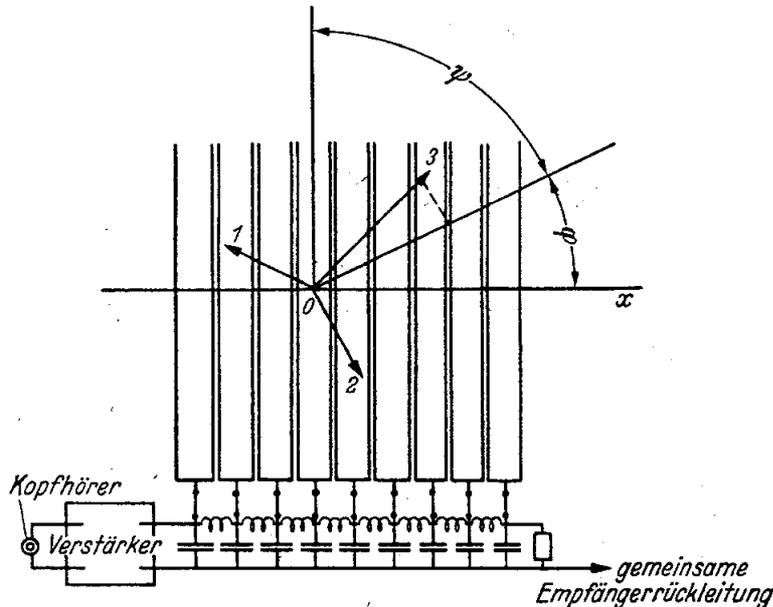


Abb. 26. Kompensationseinrichtung einer Gruppe von Strahlern (1, 2, 3) (klein zur Wellenlänge) bei beliebiger räumlicher Anordnung.

seinen größten Wert, wenn die Schallquelle mit der Kompensationsgeraden zusammenfällt. Genau die gleichen Verhältnisse treten aber auch ein, wenn wir bei feststehender Schallquelle die Kompensationsgerade ( $\varphi, \psi$ ) wandern lassen.

Denken wir uns nun die Abb. 26 als Darstellung einer naturgetreuen Verkleinerung der Empfängerkonfiguration, die um den Anfangspunkt  $O$  gedreht werden kann, so werden beim Drehen die richtigen Verzögerungen  $x_n \cos \varphi + y_n \cos \psi$  einfach als Projektionen auf eine feste Gerade, die wir als  $X$ -Achse annehmen, erreicht. Denken wir uns ferner senkrechte Kontaktschienen, die mit den einzelnen Gliedern der Verzögerungskette leitend verbunden sind (wie es die Abb. 26 zeigt) und in

$(x_1 y_1)$ ,  $(x_2 y_2)$ ,  $(x_3 y_3)$  Gleitkontakte angebracht, die während des Drehens dauernd mit dem einen Pol der entsprechenden Empfänger verbunden bleiben, während die anderen Pole über eine gemeinsame Rückleitung mit dem Anfang der Kette verbunden werden, so erreicht jeder vom Empfänger aufgenommene Impuls den Eingang des am Ende der Kette angebrachten Verstärkers mit der gewünschten Verzögerung. Dabei ist noch durch passende Wahl der Verzögerungsglieder dafür zu sorgen, daß die elektrische Verzögerungszeit der Kette entsprechend der Laufzeit des Schalles gewählt wird.

Bei der unkompenzierten Gruppe ist der Richtfaktor unabhängig von der Lage des zu peilenden Objektes. Anders dagegen bei der kompenzierten Gruppe. Hier wird die Peilschärfe um so mehr winkelabhängig sein, je mehr die Projektionspunkte der Empfänger in der Peilebene von einer kreisförmigen Anordnung abweichen. Betrachten wir die gerade Gruppe nach Abb. 8, so ist der Richtfaktor  $\mathfrak{R}_k$  für die durch  $\gamma_0$  gekennzeichnete Kompensationsrichtung durch

$$\mathfrak{R}_k = \frac{\sin \left[ \frac{n \pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_0) \right]}{n \sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_0) \right]} \quad (51)$$

gegeben.

In der Abb. 27 sind die Richtfaktoren bei einer geraden Gruppe ( $n = 6$ ,  $d = \lambda/2$ ) für die Kompensationsrichtungen  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  in Polarkoordinaten dargestellt; dabei sind die Nebenmaxima fortgelassen. Bemerkenswert ist dabei, daß die Peilschärfe noch bei  $\gamma_0 = 45^\circ$  sich wenig geändert hat. Dann aber tritt eine starke Verbreiterung des Hauptmaximums ein. Ferner liegt das Hauptmaximum nicht mehr symmetrisch zu der Kompensationsrichtung. Das hat zur Folge, daß man zu große Werte für  $\gamma_0$  findet, wenn man die Peilung in üblicher Weise so vornimmt, daß man mit dem Ohr auf beiden Seiten des Maximums die Kompensatorstellungen gleicher Lautstärke feststellt und daraus das Mittel bildet.

Diese Nachteile der geraden Gruppe werden vermieden, wenn die dicht besetzte Kreisgruppe benutzt wird, so daß die Peilebene mit der Empfängerebene zusammenfällt.

Berechnen wir zunächst den Richtfaktor der für einen beliebigen Winkel  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  kompenzierten Kreisgruppe.

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{2\pi r} \int e^{ik[x(\cos \alpha - \cos \alpha_0) + y(\cos \beta - \cos \beta_0)]} dS.$$

Führen wir  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  ein und setzen

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \beta - \cos \beta_0}{\cos \alpha - \cos \alpha_0},$$

so folgt:

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr} [\cos \varphi (\cos \alpha - \cos \alpha_0) + \sin \varphi (\cos \beta - \cos \beta_0)] d\varphi,$$

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} \cos(\varphi - \varphi_0) d\varphi,$$

$$\mathfrak{R}_k = J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} \right). \quad (52)$$

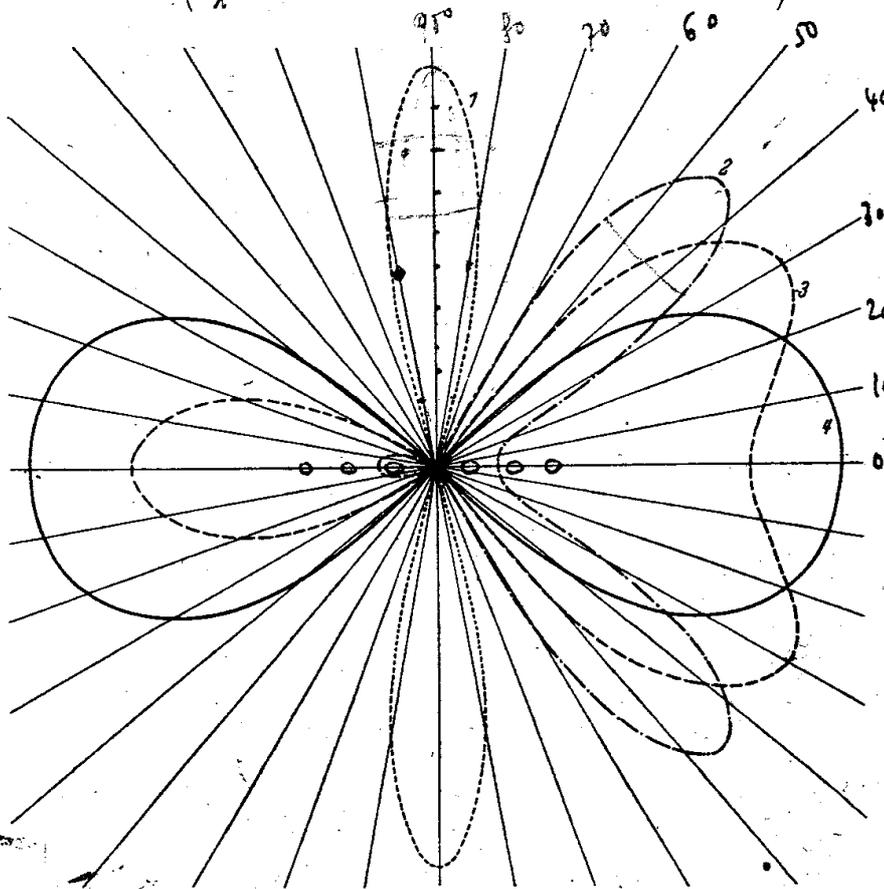


Abb. 27. Der Richtfaktor einer geraden Gruppe von 6 Strahlern bei Kompensation.  
1.  $\gamma_0 = 0^\circ$ , 2.  $\gamma_0 = 45^\circ$ , 3.  $\gamma_0 = 60^\circ$ , 4.  $\gamma_0 = 90^\circ$ .

Für  $\alpha_0 = 90^\circ$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$  muß  $\mathfrak{R}_k$  in den unkompensierten Richtfaktor nach (15) übergehen; setzen wir  $\cos \alpha_0 = \cos \beta_0 = 0$  in (52) ein, so folgt:  $\mathfrak{R}_k = J_0 \left( \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma \right)$ , da

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2} &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sin \gamma \end{aligned}$$

ist. Liegt die Schallquelle in Richtung der  $X$ -Achse, die Peilebene in der  $XZ$ -Ebene, so folgt, wegen  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  (vgl. Abb. 28):

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right). \quad (53)$$

Liegt die Schallquelle in Richtung der  $X$ -Achse, die Peilebene in der  $XY$ -Ebene (Empfängerebene), so folgt wegen  $\alpha_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ :

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (54)$$

In der Praxis ist besonders dieser letzte Fall von Bedeutung, wo Peilebene und Empfängerebene zusammenfallen. Aus der Formel (54) erkennen wir, daß die Peilschärfe der kompensierten Gruppe mit der Peilschärfe der unkompensierten Gruppe [vgl. Formel (15)] übereinstimmt, so daß wir als Peilmaß ebenfalls den Winkel  $20^\circ$  zu wählen haben. Wird eine bestimmte Peilschärfe gefordert, so ist dadurch das Verhältnis von Kreisdurchmesser zu Wellenlänge bestimmt. Wählen wir als Beispiel eine Halbwertsbreite von  $13^\circ$ , so folgt aus (18)  $\frac{d}{\lambda} = \frac{20}{13} = 1,5$ . Die weitere Frage ist, wieviel Strahler notwendig sind, damit praktisch kein Unterschied mit dem Richtfaktor der dicht besetzten Kreisgruppe besteht. Lassen wir zur Vereinfachung die Kompensationsgerade durch einen Strahler gehen, so finden wir hier eine analoge Darstellung durch BESSELSche Funktionen<sup>1</sup>:

$$\mathfrak{R}_k = J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} J_{pn}\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha np}{2}. \quad (55)$$

Daraus folgt auch hier, daß die Peilschärfe der kompensierten Kreisgruppe praktisch vollständig mit der Peilschärfe der aus 4 Strahlern bestehenden Gruppe übereinstimmt. Soll die gesamte Charakteristik übereinstimmen, so muß jetzt die Ungleichung  $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$  erfüllt sein. Oder es muß der Abstand  $a$  zweier benachbarter Strahler etwas kleiner als  $\lambda/2$  sein. Genauer muß  $\frac{a}{\lambda} < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  sein. Im übrigen gibt die Formel eine wesentlich einfachere Berechnung des Richtfaktors.

Als Beispiel berechnen wir den Richtfaktor für  $n = 6$ ,  $d = \frac{3}{4} \lambda$  und finden folgende Tabelle nach der Annäherungsformel:

$$\mathfrak{R}_k = J_0(4,71 \sin \alpha/2) + 2J_6(4,71 \sin \alpha/2) \cos 3\alpha.$$

<sup>1</sup> Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 6 (1929) S. 176.

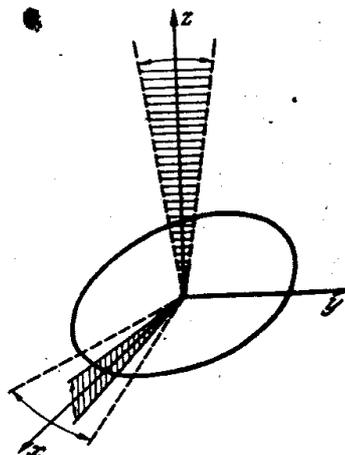


Abb. 28. Verschiedene Lagen der Peilebene bei der kompensierten Kreisgruppe.

$\alpha$	$4,71 \sin \alpha/2$	$J_0(4,71 \sin \alpha/2)$	$2J_0(4,71 \sin \alpha/2) \cos 3\alpha$	$\mathfrak{R}_k$
0	0,00	1	0	1
10	0,42	0,96	0	0,96
20	0,82	0,84	0	0,84
30	1,22	0,66	0	0,66
40	1,66	0,45	0	0,45
50	1,99	0,23	0	0,23
60	2,36	0,02	0	0,02
70	2,70	-0,14	0	-0,14
80	3,03	-0,27	-0,01	-0,28
90	3,33	-0,35	0	-0,35
100	3,61	-0,39	+0,03	-0,36
110	3,86	-0,40	+0,07	-0,33
120	4,08	-0,39	+0,10	-0,29
130	4,27	-0,37	+0,12	-0,25
140	4,43	-0,34	+0,08	-0,26
150	4,55	-0,31	+0,00	-0,31
160	4,64	-0,29	-0,10	-0,39
170	4,69	-0,27	-0,18	-0,45
180	4,71	-0,27	-0,21	-0,48

während die direkte Rechnung nach der Formel:

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{3} \{ \cos[\frac{3}{4}\pi(1 - \cos \alpha)] + \cos[\frac{3}{4}\pi(\cos(\alpha + 60^\circ) - \cos 60^\circ)] + \cos[\frac{3}{4}\pi(\cos(\alpha + 120^\circ) - \cos 120^\circ)] \} \quad (56)$$

folgende Tabelle ergibt:

$\alpha$	$\varphi_1 = 1 - \cos \alpha$	$\varphi_2 = \cos(\alpha + 60^\circ) - \cos 60^\circ$	$\varphi_3 = \cos(\alpha + 120^\circ) - \cos 120^\circ$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_1$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_2$	$\cos \frac{3}{4} \pi \varphi_3$	$\mathfrak{R}_k$
0	0,00	0,06	0,00	1	1	1	1
10	0,02	-0,16	0,14	1	0,93	0,95	0,96
20	0,06	-0,33	0,26	0,99	0,73	0,81	0,84
30	0,13	-0,50	0,37	0,95	0,38	0,64	0,66
40	0,23	-0,67	0,44	0,86	0,00	0,48	0,45
50	0,37	-0,84	0,48	0,67	-0,41	0,41	0,22
60	0,50	-1,00	0,50	0,39	-0,69	0,37	0,02
70	0,66	-1,14	0,48	0,00	-0,90	0,43	-0,14
80	0,83	-1,27	0,44	-0,37	-0,99	0,48	-0,29
90	1,00	-1,37	0,36	-0,71	-1,00	0,66	-0,35
100	1,17	-1,44	0,26	-0,93	-0,97	0,81	-0,36
110	1,34	-1,48	0,14	-1,00	-0,95	0,95	-0,33
120	1,5	-1,50	0,00	-0,92	-0,924	1	-0,28
130	1,64	-1,48	-0,16	-0,76	-0,95	0,93	-0,25
140	1,77	-1,44	-0,33	-0,59	-0,97	0,73	-0,24
150	1,87	-1,37	-0,50	-0,31	-1	0,36	-0,32
160	1,94	-1,27	-0,67	-0,12	-0,99	0	-0,37
170	1,98	-1,14	-0,84	-0,06	-0,90	-0,37	-0,44
180	2,00	-1,00	-1,00	0	-0,69	-0,69	-0,46

In Übereinstimmung mit der allgemeinen Ausführung sieht man, daß das Korrektionsglied  $2J_6$  bis  $\alpha = 60^\circ$  keinen Einfluß hat. Wenn die Forderung  $n \geq \frac{2\pi d}{\lambda} + 2$  nicht erfüllt ist, so können die auftretenden Nebenmaxima erheblich größere Werte als die durch  $J_0(x)$  gegebenen Extremwerte annehmen.

Als Beispiel berechnen wir den Fall  $n = 6$ ,  $d/\lambda = 1,5$  nach der Annäherungsformel (Abb. 30). Als Vergleich ist der Richtfaktor für

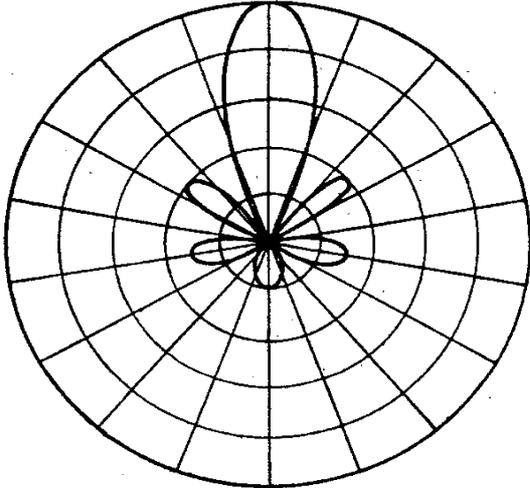


Abb. 29. Richtfaktor der kompensierten Kreisgruppe bei hinreichender Anzahl von Strahlern.

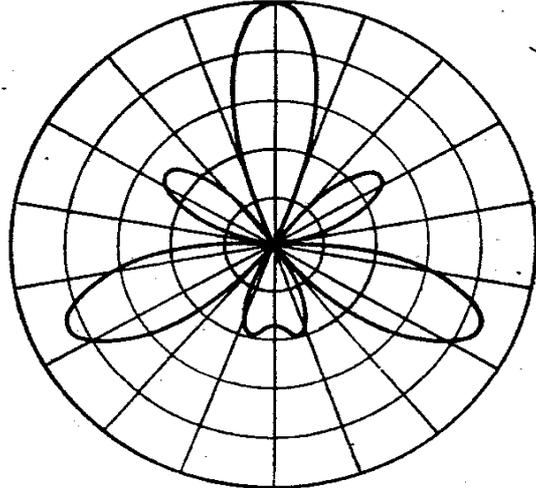


Abb. 30. Richtfaktor der kompensierten Kreisgruppe bei nicht hinreichender Anzahl von Strahlern.

$n = 14$ ,  $d/\lambda = 1,5$  gezeichnet, der einfach durch  $J_0(3\pi \sin \alpha/2)$  gegeben ist (Abb. 29). Beide Richtfaktoren stimmen in ihrem Hauptteil (d. h. bis zum ersten Minimum) vollständig überein, weichen dann aber in der Größe ihrer Nebenmaxima wesentlich voneinander ab.

## B. Der Strahlungsfaktor.

### a) Bei einer bestimmten Frequenz.

Der Richtfaktor hat seine praktische Bedeutung, wenn es sich um die Frage handelt, mit welcher Genauigkeit ein gebündeltes Empfangssystem (das z. B. drehbar angeordnet ist) eine entfernte Schallquelle peilen kann. Auch für die Frage der Störfreiung in bezug auf bestimmte Richtungen wird der Verlauf des Richtfaktors ausschlaggebend sein. Sendeseitig aber handelt es sich, außer der Frage nach der gesamten abgestrahlten Leistung, meist darum, eine bestimmte Richtung (oder Ebene) für die Schallaussendung zu bevorzugen, um den Wirkungsgrad der Anordnung zu erhöhen. Hier fragt es sich, wie groß die Schallverdichtung in der bestimmten Richtung im Vergleich zu der ungebündelten Schallausstrahlung ist.

Um zunächst die gesamte abgestrahlte Leistung eines gebündelten Strahlers zu berechnen, verfahren wir ähnlich wie bei der Einführung

des Richtfaktors, indem wir von der Formel (3) für das ungebündelte System ausgehen und dann dem Einfluß der Bündelung durch Hinzufügung eines Faktor  $\mathfrak{S}$ , den wir als *Strahlungsfaktor* bezeichnen, Rechnung tragen. So erhalten wir für die gesamte abgestrahlte Leistung  $L$  die Beziehung:

$$L = L_0 \mathfrak{S} = \frac{1}{2} c \sigma \pi w_m^2 \frac{F^2}{\lambda^2} \mathfrak{S}. \quad (57)$$

Dabei ist  $\mathfrak{S}$  durch das Integral über eine hinreichend große Kugel  $K$  mit dem Radius  $R$  definiert:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_K \mathfrak{R}^2 dK, \quad (58)$$

wobei  $\mathfrak{R}$  der durch (6) definierte Richtfaktor und  $dK$  das Oberflächenelement der Kugel mit großem Radius  $R$  bedeutet. Nun ist bei gerichteter Schallabstrahlung, die durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche mit dem Radius  $R$  in der durch den Richtfaktor  $\mathfrak{R}$  definierten Richtung hindurchgehenden Schallenergie gegeben durch:

$$\frac{p^2}{2c\sigma} = \frac{p_0^2 \mathfrak{R}^2}{2c\sigma} = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \pi \cdot \frac{w_m^2 F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\mathfrak{R}^2}{4\pi R^2}. \quad (59)$$

Wird dagegen die gesamte durch (57) gegebene Schalleistung kugelförmig abgestrahlt, so würde die durch die Flächeneinheit gehende Schallenergie gegeben sein durch:

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \frac{w_m^2 F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{4\pi R^2}. \quad (60)$$

Das Verhältnis von  $p^2/2c\sigma$  aus (59) zu  $L/4\pi R^2$  aus (60), nämlich:

$$\frac{p^2}{2c\sigma} : \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{S}} \quad (61)$$

gibt dann für jede durch den Richtfaktor gekennzeichnete Richtung an, wievielmals so groß die Schallenergie in dieser Richtung gegenüber der bei kugelförmiger Schallausbreitung geworden ist. Meistens kommt es dabei auf die Hauptrichtung, für welche  $\mathfrak{R} = 1$  ist, an. Wir wollen die dann maßgebende Größe  $1/\mathfrak{S}$  als *Verdichtungsfaktor*  $f$  bezeichnen.

Wir wollen die Bedeutung des Strahlungsfaktors an einem einfachen Beispiel erläutern. Wir denken uns zwei gleiche Strahler klein zur Wellenlänge und machen die Annahme, daß die *gesamte* abgestrahlte Leistung des aus den beiden Strahlern bestehenden Systems konstant bleiben soll, während wir den Abstand der beiden Strahler voneinander verändern. Aus Symmetriegründen bleibt dann natürlich auch die von jedem der beiden Strahler ausgestrahlte Leistung konstant. Wir wollen dann die Schalldruckamplitude in großer Entfernung  $R$  auf der Mittelachse des Systems finden (s. Abb. 31). Man könnte dann zu folgendem

Trugschluß verleitet werden: Der Strahler ① gibt die Schalldruckamplitude:

$$p_0^{(1)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot w_m}{2\lambda R} \cdot F;$$

ebenso der Strahler ②:

$$p_0^{(2)} = \frac{c \cdot \sigma \cdot w_m}{2\lambda R} \cdot F.$$

Da für die Mittelachse Gleichphasigkeit der beiden Einzelstrahler besteht, so müßte in  $P$  die resultierende Schalldruckamplitude gleich dem doppelten Wert der Schalldruckamplitude des Einzelstrahlers sein (unabhängig von dem Abstand der beiden Strahler). Andererseits wissen wir aber doch, daß eine von dem Abstand der beiden Strahler abhängige Richtwirkung, d. h. eine mit dem Abstand der Schallstrahler *veränderliche* Schallverdichtung in der Mittelachse sich ergibt. Der Fehler liegt darin, daß bei konstanter Schallabstrahlung des Einzelstrahlers die Geschwindigkeitsamplitude dieses durchaus nicht unabhängig von dem an seiner Membran durch den zweiten Strahler hervorgerufenen Schalldruck bleibt. Außer der Arbeit, die der Einzelstrahler bei ungestörtem Schallfeld leisten muß, muß er bei Vorhandensein eines zweiten Strahlers noch den von diesem auf seine Membran ausgeübten Druck überwinden. Diese Mehrarbeit wird verschieden sein, je nach dem Phasenunterschied, d. h. dem Abstand zwischen beiden Strahlern. (Ganz ähnlich liegt der Fall, wenn wir in einem durch eine starre Wand abgeschlossenen Halbraum einen Strahler konstanter Schalleistung der Wand immer mehr nähern.) Um dies rechnerisch zu untersuchen, berechnen wir die gesamte abgestrahlte Leistung  $L$  des aus zwei gleichen Strahlern, ① und ② im Abstand  $d$  bestehenden Systems (Abb. 32).

Es ist nach (57):

$$L = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \pi w_m^2 \frac{(2F)^2}{\lambda^2} \cdot \mathfrak{S}, \tag{62}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_K \mathfrak{R}^2 dK = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\alpha \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos \alpha\right) \sin \alpha,$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\pi d/\lambda}{2\pi d/\lambda}\right). \tag{63}$$

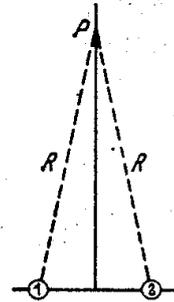


Abb. 31. Zur Erläuterung des Strahlungsfaktors.

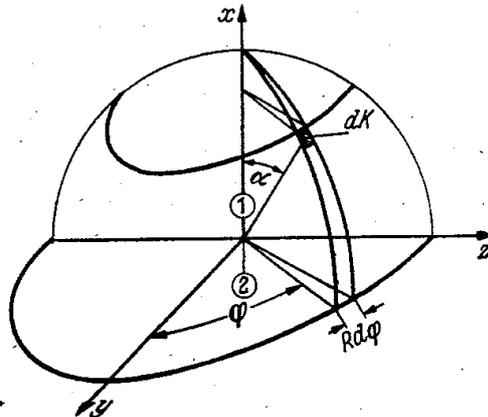


Abb. 32. Zur Berechnung des Strahlungsfaktors.

Die Abhängigkeit des Strahlungsfaktors von  $d/\lambda$  zeigt Abb. 33, Kurve 1. Würden wir  $w_m$  bei beiden Strahlern konstant halten können, so würde die abgestrahlte Leistung sich nach (62) in derselben Weise

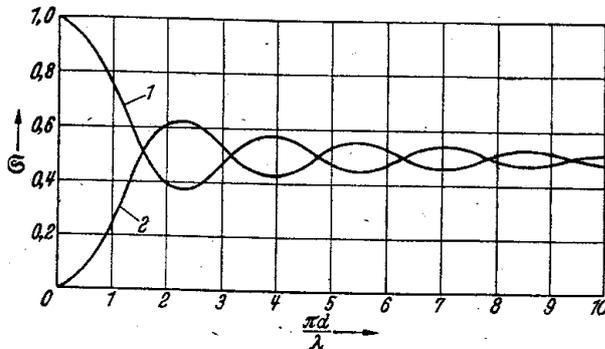


Abb. 33. Strahlungsfaktor des aus 2 Strahlern (Abstand  $d$ ) bestehenden Systems. 1. Bei gleicher Phase. 2. Bei Gegenphase.

wie  $\mathcal{E}$  in Abb. 33 ändern. Umgekehrt: Wenn wir  $L$  konstant halten und ändern den Abstand, so muß sich  $w_m^2$  mit  $1/\mathcal{E}$  ändern, da  $w_m^2 \mathcal{E}$  bei konstantem  $L$  konstant bleiben muß. Und die Schallstärke erhält in der Symmetrieebene bei konstanter Gesamtausstrahlung ihr Maximum, wenn der Verdichtungsfaktor  $f = 1/\mathcal{E}$  sein Maximum hat. Wir rechnen leicht aus, daß dies für  $d/\lambda = 0,715$  der Fall ist und daß der maximale Wert von  $f$  hier gleich 2,554 wird. Das bedeutet: Wenn wir eine bestimmte Schalleistung, anstatt durch einen ungebündelten Einzel-

$n$	$f_{\max} = 1/\mathcal{E}_{\max}$	für $d/\lambda$
2	= 2,55	= 0,715
3	= 4,25	= 0,77
4	= 5,9	= 0,825
5	= 7,7	= 0,865
6	= 9,5	= 0,90

strahler abzustrahlen, durch zwei für sich ungebündelte Einzelstrahler abstrahlen, so kann in der Symmetrieebene im Höchsthalle die 2,55-fach Schallenergie pro Flächeneinheit erreicht werden, gegenüber der ungebündelten Schallabstrahlung. In derselben

Weise können wir bei der Gruppenanordnung von 3, 4, 5 usw. in gleichem Abstand auf einer Geraden angeordneten Schwingern nach dem maximalen Verdichtungsfaktor fragen und finden immer *einen* ganz bestimmten Wert von  $d/\lambda$ , bei dem dies der Fall ist. Und zwar ergibt sich vorstehende Tabelle.

Bezeichnen wir den Strahlungsfaktor bei  $n$  derartig angeordneten Strahlern mit  $\mathcal{E}_n$ , so ergibt sich allgemein<sup>1</sup>:

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{n^2} \left( n + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin m 2\pi d/\lambda}{m \cdot 2\pi d/\lambda} \right). \quad (64)$$

Für  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  Strahler ist  $f = 1/\mathcal{E}_n$  in der Abb. 34 dargestellt.

Ist  $d$  gleich  $\lambda/2$  oder ein ganzzahliges Vielfaches davon, so folgt aus (64):

$$\mathcal{E}_n = 1/n,$$

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 964.

d. h. dann ist der Verdichtungsfaktor gleich  $n$ . Hierauf hat bereits Lord RAYLEIGH hingewiesen<sup>1</sup>. Von ihm stammt auch die Berechnung der kreisförmigen Kolbenmembran<sup>2</sup>. Und zwar ergibt sich für diese, wenn  $d$  der Durchmesser ist:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{2}{(\pi d/\lambda)^2} \left[ 1 - \frac{2J_1\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{2\pi d/\lambda} \right], \quad (65)$$

wobei  $J_1$  die BESSELSche Funktion erster Ordnung bezeichnet. Für großes  $d/\lambda$  ergibt sich daraus der Verdichtungsfaktor  $f$  der kreisförmigen Kolbenmembran:

gewandafno 
$$f = 2, \pi F/\lambda^2, \quad (66)$$

wenn  $F$  die Fläche der Membran bedeutet.

Auch die Strahlungsfaktoren der kreisförmigen Membran, deren Geschwindigkeitsamplitude

$$w = (1 - \rho^2/r^2)^n$$

ist, lassen sich mit Hilfe der BESSELSchen Funktionen berechnen. Und zwar ergibt sich für  $w_1 = 1 - \rho^2/r^2$  der Strahlungsfaktor:

$$\mathfrak{S}_1 = 2^2 \cdot 2! \cdot 2! \left( \frac{x^{-4}}{2!} + \frac{x^{-3}}{1! 3!} - \frac{J_2(2x)}{x^6} - \frac{2J_3(2x)}{x^5} \right), \quad (67)$$

und für  $w_2 = (1 - \rho^2/r^2)^2$  der Strahlungsfaktor:

$$\mathfrak{S}_2 = 2^3 \cdot 3! \cdot 3! \left( \frac{3x^{-6}}{3!} + \frac{x^{-4}}{1! 4!} + \frac{3x^{-3}}{2! 5!} - \frac{3J_3(2x)}{x^9} - \frac{4J_4(2x)}{x^8} - \frac{4J_5(2x)}{x^7} \right). \quad (68)$$

Allgemein ergibt sich durch Reihenentwicklung für  $w_n = (1 - \rho^2/r^2)^n$

$$\mathfrak{R}_n = 1 - \frac{(x/2)^2}{n+2} + \frac{(x/2)^4}{2! (n+2)(n+3)} - \frac{(x/2)^6}{3! (n+2)(n+3)(n+4)} + \dots,$$

$$\mathfrak{S}_n = 1 - \frac{x^2}{3(n+2)} + \frac{(2n+5)x^4}{2! \cdot 3 \cdot 5 \cdot (n+2)^2 (n+3)} - \frac{(2n+7)x^6}{3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 (n+2)^2 \cdot (n+3)(n+4)} + \dots. \quad (69)$$

Die Strahlungsfaktoren  $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$  sind in Abb. 35 dargestellt.

<sup>1</sup> On the production and distribution of sound, Phil. Mag. 1903 S. 289—305.

<sup>2</sup> The theory of sound. § 302.

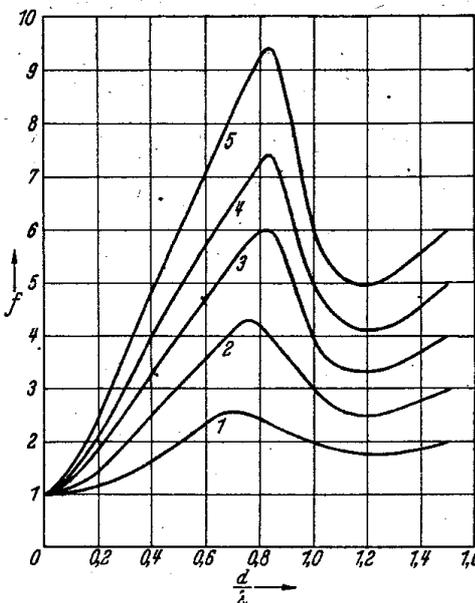


Abb. 34. Verdichtungsfaktor der geraden Gruppe ( $d$  = Abstand zweier Strahler). 1. 2 Strahler; 2. 3 Strahler; 3. 4 Strahler; 4. 5 Strahler; 5. 6 Strahler.

Für eine rechteckige Kolbenmembran, deren eine Seite ( $b$ ) klein zur Wellenlänge ist, während die andere Seite ( $c$ ) beliebig ist, ergibt sich der Strahlungsfaktor (Abb. 36):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{c\pi}{\lambda} (\cos \gamma)}{\left(\frac{c\pi}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \gamma} \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{2c\pi} \int_{-\frac{c\pi}{\lambda}}^{+\frac{c\pi}{\lambda}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt, \\ \mathcal{S} &= -\frac{\sin^2 c\pi/\lambda}{(c\pi/\lambda)^2} + \frac{1}{c\pi/\lambda} \int_0^{2c\pi/\lambda} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\sin^2 c\pi/\lambda}{(c\pi/\lambda)^2} + \frac{1}{c\pi/\lambda} Si \frac{2c\pi}{\lambda}. \quad (70) \end{aligned}$$

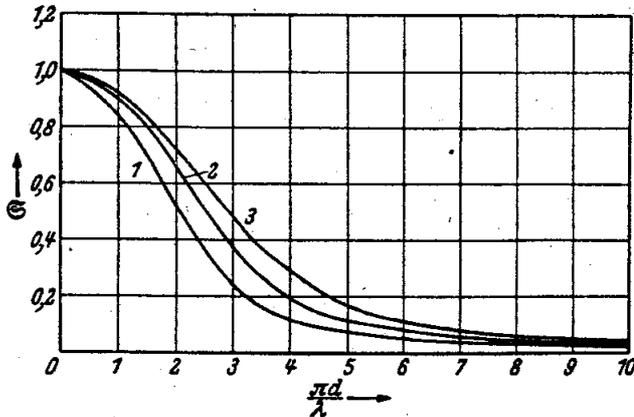


Abb. 35. 1. Strahlungsfaktor der kreisförmigen Kolbenmembran ( $w = 1$ ); 2. Strahlungsfaktor der eingespannten Membran ( $w = 1 - \rho^2/r^2$ ); 3. Strahlungsfaktor der eingespannten Membran [ $w = (1 - \rho^2/r^2)^2$ ].

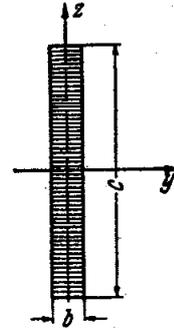


Abb. 36. Zur Berechnung des Strahlungsfaktors der rechteckigen Kolbenmembran.

Ersetzt man den Integralsinus

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

durch die Annäherung:

$$Si x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} (1 - 2/x^2) - \frac{\sin x}{x},$$

so folgt:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2x} \left[ \pi - 1/x - \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x^2} \right], \quad x = \frac{c\pi}{\lambda}. \quad (71)$$

Für größere Werte von  $x$  ( $x \geq 2$ ) wird man sich auf die Annäherung:

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{2x} \text{ bzw. } \mathcal{S} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2x^2} \text{ beschränken können (vgl. die Tabelle).}$$

Der maximale Verdichtungsfaktor  $f$  ergibt sich dann für große  $c\pi/\lambda$  gleich  $2c/\lambda$ . Das bedeutet also, daß eine rechteckige schmale Kolbenmembran (in starrer Wand) mit einer Seitenlänge von 10 Wellenlängen in der Symmetrieebene ( $XY$ -Ebene) 20mal soviel Schallenergie pro Flächeneinheit aussendet wie bei ungebündelter Schallstrahlung.

$x$	$\frac{\text{Si } 2x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2}$	$x$	$\frac{\text{Si } 2x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x^2}$	$\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2x^2}$
0	1	2,5	0,563	0,548
0,2	0,994	3	0,473	0,467
0,4	0,983	3,5	0,406	0,408
0,6	0,949	4	0,358	0,361
0,8	0,931	4,5	0,323	0,324
1	0,897	5	0,295	0,294
1,2	0,858	5,5	0,271	0,269
1,4	0,813	6	0,249	0,248
1,6	0,766	6,5	0,230	0,230
1,8	0,719	7	0,214	0,214
2	0,673	7,5	0,200	0,200

Wenn  $b$  nicht klein zur Wellenlänge ist, kann  $\mathcal{S}$  allgemein durch folgende Reihe dargestellt werden<sup>1</sup>:

$$\mathcal{S} = \varphi_0 \left( \frac{c\pi}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{4!} \left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^2 \varphi_1 \left( \frac{c\pi}{\lambda} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^5}{2 \cdot 4 \cdot 6!} \left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^4 \varphi_2 \left( \frac{c\pi}{\lambda} \right) - \dots, \quad (72)$$

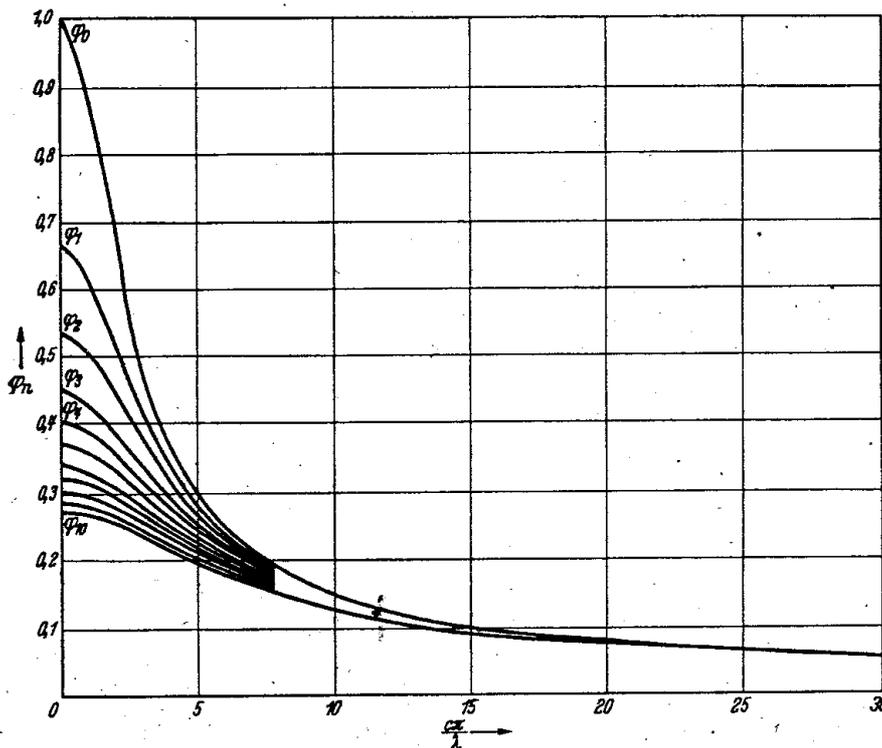


Abb. 37. Funktionen zur Berechnung des Strahlungsfaktors des Rechtecks.

wobei:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin^2 z}{z^2} \left( 1 - \frac{z^2}{x^2} \right)^n dz \quad (73)$$

gesetzt ist.

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. Bd. 7 (1930) S. 953—957.

Diese Funktionen sind in Abb. 37 dargestellt. Man erkennt daraus, daß sobald  $c/\lambda > 5$  geworden ist,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  durch  $\varphi_0$  ersetzt werden können. Dann folgt aus (72):

$$\mathcal{G} = \varphi_0 \left( \frac{c\pi}{\lambda} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)}{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)^2} d\varphi. \quad (74)$$

Das Integral:

$$\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)}{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \cos \varphi \right)^2} d\varphi$$

findet man durch Reihenentwicklung:

$$\psi = 1 - \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^2}{3 \cdot 1! 2!} + \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^4}{5 \cdot 2! 3!} - \frac{\left( \frac{b\pi}{\lambda} \right)^6}{7 \cdot 3! 4!} + \dots \quad (75)$$

oder für größere  $b\pi/\lambda$  besser durch die nach BESELSchen Funktionen fortschreitende Reihe:

$$\psi = \frac{1}{b\pi/\lambda} \left[ J_1 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + 2J_3 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + 2J_5 \left( \frac{2\pi b}{\lambda} \right) + \dots \right]. \quad (76)$$

Diese Reihe ist für größere Werte von  $b\pi/\lambda$  wesentlich bequemer auszuwerten. Und zwar ergibt sich, daß für  $b\pi/\lambda > 3$  der Wert der in der eckigen Klammer stehenden Summe nur um Prozente von Eins abweicht. Der Wert der Funktion

$$x \cdot \psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x \cos \varphi)}{x \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (77)$$

ist in der Abb. 38 dargestellt.

Nehmen wir also an, daß  $c/\lambda > 5$  und  $b/\lambda > 1$ , so ergibt sich für den Verdichtungsfaktor:

$$\mathcal{G} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x \cos \varphi)}{x \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{c\pi/\lambda \cdot b\pi/\lambda}{\pi/2} = \frac{2\pi F}{\lambda^2}. \quad (78)$$

Für Werte von  $b\pi/\lambda$  und  $c\pi/\lambda$  zwischen 0 und 10 ist der Verdichtungsfaktor in der Abb. 39 allgemein dargestellt. Und zwar sind die Kurven gezeichnet, für welche der Verdichtungsfaktor einen konstanten Wert besitzt. Wir finden z. B. für ein Quadrat, für welches  $b\pi/\lambda = c\pi/\lambda = 3,15$  ist, denselben Verdichtungsfaktor  $f = 7$  wie für das Rechteck  $b\pi/\lambda = 0,5$ ;  $c\pi/\lambda = 10$ , trotzdem die Fläche des Rechtecks nur halb so groß ist. Für  $a\pi/\lambda < 1$  und  $b\pi/\lambda < 1$  ergeben sich (Viertel) Kreise, für  $f > 10$  ergeben sich (im mittleren Teil) Hyperbeln. Das Letztere besagt, daß mit genügender Genauigkeit  $\mathcal{G} = 2\pi F/\lambda^2$  geschrieben werden kann.



$\gamma = 24^\circ$ . Während wir bei zwei gleichphasigen Strahlern im besten Falle eine 2,55fache Verdichtung erzielen konnten (für  $\gamma = 0^\circ$ ), ergibt sich bei zwei gegenphasigen Strahlern höchstens eine 2,29fache Verdichtung (für  $\gamma = 24^\circ$ ). Für das Beispiel auf S. 26, wo  $w_m = 0$  war, verliert natürlich auch der Strahlungsfaktor seinen Sinn und wir müssen auch hier die gesamte Leistung  $L_1$  nach der Formel (59) berechnen, dann folgt aus:

$$p = \frac{c \cdot \sigma \cdot F}{\lambda \cdot R} (\mathfrak{R}_1(x) - \mathfrak{R}_0(x)), \quad (80)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \frac{c \cdot \sigma}{\lambda^3 R^2} \cdot F^2 \int_K [\mathfrak{R}_1(x) - \mathfrak{R}_0(x)]^2 dK \\ &= 4\pi c \sigma \frac{F^2}{\lambda^2} \left[ \frac{1}{3x^2} - \frac{J_1(2x)}{x^3} + \frac{4J_3(2x)}{x^5} - \frac{8J_4(2x)}{x^4} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Ersetzt man die BESSELSchen Funktionen durch ihre Potenzreihen, so folgt:

$$L_1 = 4\pi c \sigma \frac{F^2}{\lambda^2} \left[ \frac{1 \cdot 2 \cdot x^4}{3! 6!} - \frac{2 \cdot 3 x^6}{4! 7!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot x^8}{5! 8!} - \dots \right]. \quad (82)$$

Vergleicht man damit die von einer gleichgroßen Kolbenmembran mit der Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$  abgestrahlte Leistung:

$$L_2 = 2\pi \cdot c \cdot \sigma \cdot \frac{F^2}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{x^2} \left( 1 - \frac{J_1(2x)}{x} \right). \quad (83)$$

so ist für kleine  $x$ :

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4x^4}{3! 6!},$$

Das ergibt für:  $x = \frac{\pi d}{\lambda} = \frac{1}{2}$

$$L_1/L_2 = 1/17280.$$

Das bedeutet: Wenn die zu  $L_1$  gehörende Membran dieselbe Leistung abstrahlen soll, wie die zu  $L_2$  gehörende, so muß die Amplitude der ersteren Membran gleich dem  $\sqrt{17280} = 131$ fachen der Amplitude der Letzteren sein.

Für sehr große  $d/\lambda$  dagegen ist [wegen (81) und (83)]:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{3}.$$

### b) Bei künstlicher Kompensation.

Aus der Abb. 27 ist zu ersehen, daß auch die Strahlungsverteilung sich durch künstliche Kompensation wesentlich ändert. Allgemein ergibt sich der Strahlungsfaktor für die aus 2 Strahlern bestehende kompensierte Gruppe:

$$\mathfrak{S}_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \left[ \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_k) \right] \cos \gamma d\gamma. \quad (84)$$

Führen wir eine neue Integrationsvariable  $x$  durch

$$x = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma_k)$$

ein, so folgt:

$$\mathfrak{S}_k = \frac{\lambda}{2\pi d} \int_{-\frac{\pi d}{\lambda}(1 + \sin \gamma_k)}^{\frac{\pi d}{\lambda}(1 - \sin \gamma_k)} \cos^2 x dx,$$

$$\mathfrak{S}_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi d}{\lambda}}{2\pi d/\lambda} \left[ \cos \left( \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \gamma_k \right) \right] \right\}. \quad (85)$$

In der Abb. 40 ist  $\mathfrak{S}_k$  für  $\sin \gamma_k = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  dargestellt. Da  $\sin \gamma_k = 0$  dem unkompensierten Fall entspricht, so erkennt man, daß

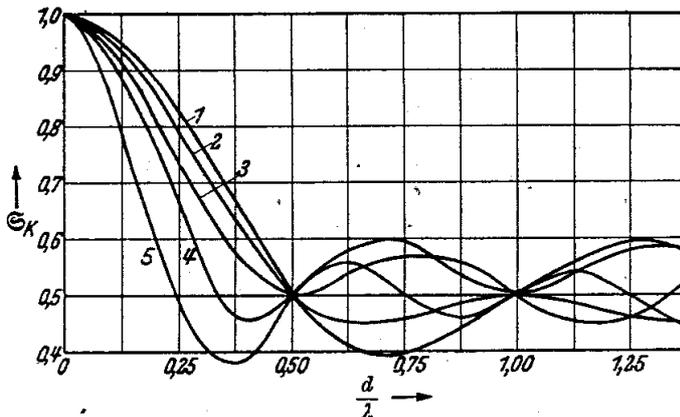


Abb. 40. Strahlungsfaktor bei zwei kompensierten Strahlern. (Abstand  $d$ , Kompensationswinkel  $\gamma_k$ ).  
1.  $\sin \gamma_k = 0$ ; 2.  $\sin \gamma_k = \frac{1}{4}$ ; 3.  $\sin \gamma_k = \frac{1}{2}$ ; 4.  $\sin \gamma_k = \frac{3}{4}$ ; 5.  $\sin \gamma_k = 1$ .

für  $d/\lambda < \frac{1}{2}$  der unkompensierte Fall stets größere Werte liefert; z. B. ist für  $d/\lambda = \frac{1}{4}$   $\mathfrak{S} = 0,83$ ;  $\mathfrak{S}_k = 0,5$ .

Daraus folgt, daß der Verdichtungsfaktor der kompensierten Gruppe in Richtung der Verbindungslinie der Strahler (d. h.  $\gamma_k = 90^\circ$ ) 1,66 mal so groß ist wie der Verdichtungsfaktor der unkompensierten Gruppe in der Maximalrichtung. Will man also mit zwei ungerichteten Strahlern im Abstand  $d < \lambda/2$  für eine bestimmte Richtung eine möglichst große Schallstärke erzielen, so ist es günstiger, mit einer kompensierten Anordnung zu arbeiten.

Allgemein ergibt sich der Strahlungsfaktor für eine kompensierte gerade Gruppe, die aus  $n$  in gleichem Abstand befindlichen Strahlern besteht:

$$\mathfrak{S}_k = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \cdot 2 \frac{\sin(m \cdot 2\pi d/\lambda) \cdot \cos(m \cdot 2\pi d/\lambda \sin \gamma_k)}{m \cdot 4\pi d/\lambda}$$

Fällt die Richtung der Kompensationsgeraden in die Richtung der Empfängergeraden (d. h.  $\gamma_k = 90^\circ$ ), so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_k = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin(m \cdot 4\pi d/\lambda)}{m \cdot 4\pi d/\lambda}. \quad (86)$$

Aus dem Vergleich mit dem Strahlungsfaktor im unkompensierten Fall (d. h.  $\gamma_k = 0$ ) schließen wir wegen:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \frac{\sin\left(m \cdot \frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{m \cdot 2\pi d/\lambda}. \quad (87)$$

Die gerade unkompensierte Gruppe mit dem Empfängerabstand  $d$  hat denselben Strahlungsfaktor wie die in der Empfängerrichtung kompensierte Gruppe mit dem Empfängerabstand  $d/2$ . Oder anders ausgedrückt: Die Schallkonzentration der geraden unkompensierten Gruppe in der Mittelachse ist gleich der Schallkonzentration der in der Empfängereinrichtung kompensierten Gruppe bei halbem Empfängerabstand.

Um den Strahlungsfaktor für die dicht besetzte Kreisgruppe bei einer Kompensationsrichtung  $(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)$  zu finden, haben wir das Integral:

$$\mathfrak{E}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\gamma \mathfrak{R}^2 \sin \gamma \quad (88)$$

zu berechnen, wobei  $\mathfrak{R}$  nach (52) durch

$$\mathfrak{R} = J_0\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)^2 + (\cos \beta - \cos \beta_0)^2}\right)$$

gegeben ist.

Wegen:  $\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varphi$ ,  $\cos \beta = \sin \gamma \sin \varphi$  folgt:

$$\mathfrak{R} = J_0(kr \sqrt{\sin^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \gamma_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin^2 \gamma_0}).$$

Setzen wir zur Abkürzung:  $u = kr \sin \gamma$ ,  $v = kr \sin \gamma_0$ , so folgt zunächst nach dem Additionstheorem der BESSELSchen Funktionen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= J_0\left(\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos(\varphi - \varphi_0)}\right) \\ &= J_0(u)J_0(v) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(u)J_n(v) \cos n(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (89)$$

Bilden wir dann:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}^2 d\varphi,$$

so fallen bei der Integration wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi_0) \cos n(\varphi - \varphi_0) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}$$

die Faktoren mit ungleichem Index heraus, und es ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re^2 d\varphi = J_0^2(u) J_0^2(v) + 2J_1^2(u) J_1^2(v) + \dots \quad (90)$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k &= J_0^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \int_0^{\pi/2} J_0^2(kr \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma \\ &+ 2J_1^2(kr \sin \gamma_0) \int_0^{\pi/2} J_1^2(kr \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma + \dots \end{aligned} \quad (91)$$

oder wegen:

$$\int_0^{\pi/2} J_n^2(x \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{x} \int_0^x J_{2n}(\xi) d\xi \quad (92)^1$$

folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_k &= J_0^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_0(2\xi) d\xi + 2J_1^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_2(2\xi) d\xi \\ &+ 2J_2^2(kr \sin \gamma_0) \cdot \frac{1}{kr} \int_0^{kr} J_4(2\xi) d\xi + \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Die Berechnung der Integrale:

$$\varphi_n(x) = \int_0^x J_{2n}(2x) dx$$

läßt sich wegen der Beziehung:

$$\int_0^x J_r(2x) dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{r+2n+1}(2x) \quad (94)$$

mit Hilfe der Tafeln für die BESSELSchen Funktionen leicht ausführen. Die entsprechenden Funktionen:

$$\varphi_n(x)$$

sind in der Abb. 41 dargestellt.

<sup>1</sup> Der Beweis von (92) ergibt sich, wenn man in der bekannten Gleichung:

$$J_n^2(x \sin \gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \sin \gamma \cos \varphi) d\varphi$$

beide Seiten mit  $\sin \gamma d\gamma$  multipliziert

und von 0 bis  $\pi/2$  integriert und danach die von NIELSEN (Handb. der Zylinderfunktionen, S. 380, Formel I<sub>3</sub> [ $\nu = 0$ ]) angegebene Beziehung:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin \omega f(x \sin \omega \sin \varphi) d\omega d\varphi = \frac{\pi}{2} f(x)$$

benutzt.

In der Abb. 42 ist der Strahlungsfaktor (für die Kreisgruppe)  $\mathfrak{S}_k\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$  in Abhängigkeit von  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  gezeichnet ( $r =$  Radius des Kreises,  $\lambda =$  Wellenlänge). Und zwar gilt:

die Kurve 1 für den unkompensierten Fall (d. h.  $\gamma_k = \gamma_0 = 0^\circ$ ),

die Kurve 2 für den Fall  $\gamma_k = 30^\circ$ ,

die Kurve 3 für den Fall  $\gamma_k = 90^\circ$ .

Außerdem sind noch die aus diesen hervorgehenden Kurven 4, 5, 6:

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \mathfrak{S}_k\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

gezeichnet.

Aus den letzteren erkennt man, daß mit wachsendem  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  sich  $\frac{2\pi r}{\lambda} \mathfrak{S}_k\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)$  immer mehr der Größe  $\frac{1}{2}$  nähert.

Das bedeutet: Der Verdichtungsfaktor  $f = 1/\mathfrak{S}_k$  ist für großes  $r/\lambda$  (d. h. bei scharfer Bündelung) durch  $\frac{2\pi r}{\lambda} \cdot 2$  gegeben. Anders ausgedrückt heißt dies: Die in  $\lambda$  gemessene Länge des Kreisumfangs ergibt, mit 2 multipliziert, die Größe des Verdichtungsfaktors. Im Zusammenhang mit den früheren Betrachtungen über den Verdichtungsfaktor bei unkompensierten Strahleranordnungen, die eine *gerade Linie*, eine *Kreislinie*, eine *Kreisfläche* oder eine *rechteckige Fläche* erfüllen, können wir folgenden allgemeinen Satz formulieren:

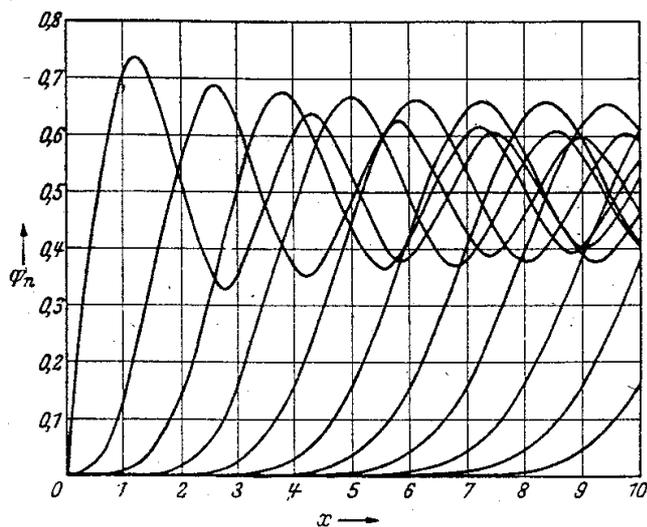


Abb. 41. Hilfsfunktionen zur Berechnung des Strahlungsfaktors.

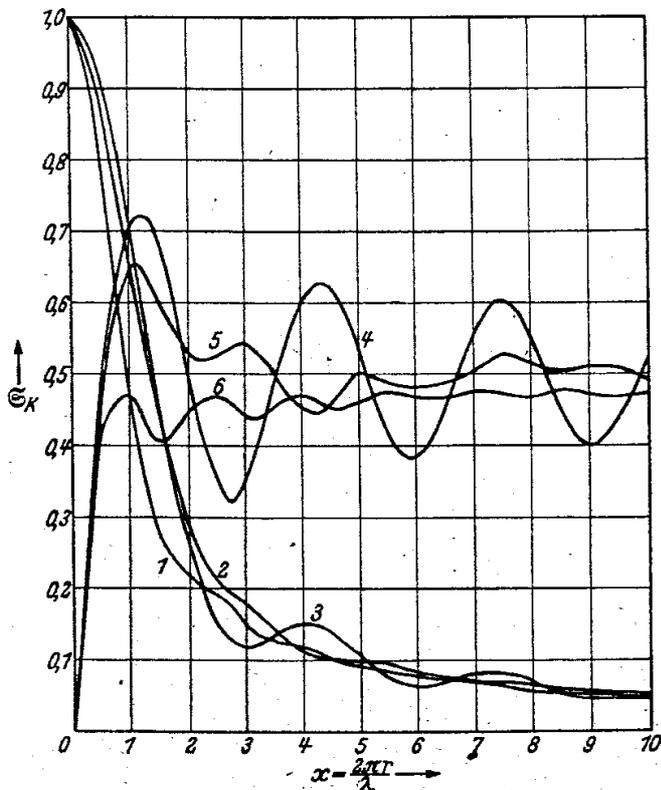


Abb. 42. Strahlungsfaktor der kompensierten Kreisgruppe: 1.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 0^\circ$ ; 2.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 30^\circ$ ; 3.  $\mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 90^\circ$ ; 4.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 0^\circ$ ; 5.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 30^\circ$ ; 6.  $x \mathfrak{S}_k(x)$  für  $\gamma_k = 90^\circ$ .

Bei scharfer Bündelung ist der Verdichtungsfaktor

1. bei linienförmiger Strahleranordnung durch 2 mal der in  $\lambda$  gemessenen Länge der strahlenden Linie,

2. bei flächenhafter Strahleranordnung durch  $2\pi$  mal der in  $\lambda^2$  gemessenen Fläche der strahlenden Anordnung gegeben.

## Zweiter Teil.

# Das Schallfeld in der Nähe des Strahlers.

### 3. Die Gruppe von zwei Einzelstrahlern.

Bei den bisherigen Betrachtungen war die Voraussetzung gemacht, daß sich der Aufpunkt in *hinreichendem Abstand* von der strahlenden Fläche befand. Für diesen Teil des Schallfeldes, der für die praktisch vorliegenden Aufgaben meist im Vordergrund steht, ergab sich eine einfache Darstellung, indem zu dem Ausdruck, der die ungerichtete Strahlung kennzeichnet, ein Faktor tritt, der nicht mehr vom *Abstand* des Aufpunktes, sondern nur noch von der *Richtung* der Aufpunktsgeraden abhängt. Und zwar war diese charakteristische Funktion (der Richtfaktor) nur abhängig von einer Größe (zum Beispiel der Form  $x = \frac{2\pi r}{\lambda} \sin \gamma$ ). Durch diese *eine* Funktion war also das Schallfeld im wesentlichen bestimmt, und zwar ganz allgemein bei irgendeiner vorgegebenen Frequenz (Wellenlänge) und bei irgendeiner vorgegebenen Ausdehnung ( $r/\lambda$ ) des strahlenden Systems. Für die Berechnung und Darstellung des *Nahfeldes* sind die Verhältnisse wesentlich schwieriger. Erstens sind wir gezwungen, das Nahfeld in einer so großen Anzahl von Punkten zu berechnen, daß das gesamte Feld durch Interpolation übersehen werden kann, und zweitens ist es erforderlich, diese Darstellung für jeden besonderen Fall, der durch das Verhältnis von geometrischer Ausdehnung zur Wellenlänge gekennzeichnet ist, besonders durchzuführen. Die Mannigfaltigkeit ist jetzt also ganz wesentlich größer geworden. Wir werden daher die Darstellung des Nahfeldes auf spezielle Fälle beschränken müssen. Und zwar werden wir das Schallfeld darstellen, indem wir in der Nachbarschaft des Strahlersystems die Kurven zeichnen, welche einer konstanten Schalldruckamplitude entsprechen.

Zunächst muß klargestellt werden, wann ein Aufpunkt zum Nahfeld gerechnet werden muß und wann dies nicht der Fall ist. Die Bezeichnung „Nahfeld“ könnte die falsche Vorstellung erwecken, als ob dies Nahfeld allein von den geometrischen Strahlerverhältnissen abhängig ist, so daß man etwa sagen könnte, daß bei einer strahlenden kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $\rho$  alle Aufpunkte nicht mehr

zum Nahfeld rechnen, die z. B. um das Zehnfache des Radius vom Membranmittelpunkt entfernt liegen. Tatsächlich reicht diese Definition nicht aus, sondern es kommt dabei außerdem noch auf die Wellenlänge an. Um dies genauer zu untersuchen, müssen wir von der allgemeinen, für Nah- und Fernfeld geltenden Formel ausgehen und feststellen, unter welchen Bedingungen diese in die für das Fernfeld angegebene Formel (6) übergeht.

Wir setzen voraus, daß die strahlende Fläche der Membran in einer starren unendlichen Wand liegt oder als Doppelmembran wirkt, wobei der eine Teil in jedem Moment symmetrisch zu dem anderen Teil schwingt, wie es in Abb. 1e und 1f dargestellt ist. Dabei darf die strahlende Fläche auch aus mehreren einzelnen in derselben starren Wand liegenden Teilen bestehen oder aus mehreren einzelnen Doppelmembranen, die alle die Symmetrieebene gemeinsam haben. Wir denken uns die strahlende Fläche in der Nullage in der  $XY$ -Ebene und die Geschwindigkeitsamplitude durch

$$w = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (95)$$

gegeben.

Dabei werden wir im allgemeinen  $w(x, y)$  als reelle Funktion voraussetzen. Das bedeutet physikalisch, daß alle schwingenden Membranelemente gleichzeitig durch die Nullage gehen und gleichzeitig ihre Extremwerte erreichen, so daß nur gleichphasige oder gegenphasige Bewegungen (mit Knotenlinien) der Membranelemente möglich sind. Grundsätzlich bestehen aber keine Schwierigkeiten, die Geschwindigkeitsamplitude in jedem Punkte der Membran nach Amplitude und Phase vorzuschreiben, indem man

$$w(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

als komplexe Funktion festsetzt.

Dann ist für einen beliebigen Aufpunkt  $P$  in dem oberen Halbraum (wegen der starren Wand können wir uns auf den Halbraum  $z \geq 0$  beschränken) der Schalldruckverlauf nach RAYLEIGH<sup>1</sup> gegeben durch:

$$p = e^{i(\omega t + \pi/2)} \cdot \frac{c\sigma}{\lambda} \int_F w(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} dF. \quad (96)$$

Dabei ist die Integration über die in den Halbraum strahlende Fläche  $F$  zu erstrecken, wobei  $r$  den Abstand des Integrationselementes  $dF$  vom Aufpunkt  $P$  und  $R$  die Entfernung des Aufpunktes vom Koordinatenanfangspunkt bedeutet (vgl. Abb. 43).

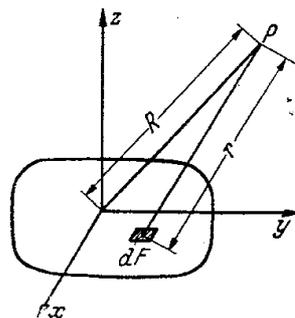


Abb. 43. Zur Definition des Nahfeldes.

<sup>1</sup> The theory of sound. § 278.

Hat der Aufpunkt  $P$  die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  und der Mittelpunkt des Flächenelementes  $dF$  die Koordinaten  $x, y$ , so folgt aus:

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2$$

die Beziehung:

$$r^2 = R^2 + x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0.$$

Daher ist:

$$\frac{r}{R} = \left[ 1 - \frac{2(x \cos \alpha + y \cos \beta)}{R} + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{r}{R} = 1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} \right)^2. \quad (97)$$

Dabei sind in der Entwicklung die Glieder höherer als zweiter Ordnung vernachlässigt. An Stelle der früheren Formel (die sich unter der Annahme eines *hinreichenden* Abstandes des Aufpunktes ergab):

$$p = \frac{c \sigma}{\lambda \cdot R} e^{i(\omega t + \pi/2 - kR)} \int_F w(x, y) e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)} dF \quad (98)$$

folgt jetzt aus (96) und (97):

$$p = \frac{c \cdot \sigma}{\lambda \cdot R} e^{i(\omega t + \pi/2 - kR)} \int_F w(x, y) \cdot e^{ik(x \cos \alpha + y \cos \beta)}$$

$$\cdot \frac{e^{-\frac{ik}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2}{R} - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta)^2}{R} \right]}}{1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2R^2} [x^2 + y^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta)^2]} dF. \quad (99)$$

Man kann daher (99) dann durch (98) ersetzen, wenn

$$\frac{e^{-\frac{ik}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2}{R} - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta)^2}{R} \right]}}{1 - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{R} \right)^2}$$

durch 1 ersetzt werden kann. Da dies für alle  $\alpha$  und  $\beta$  gelten soll, so ist leicht zu sehen, daß dazu wegen des Nenners:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} \ll 1 \quad (100)$$

und wegen des Zählers:

$$e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2R}} \ll 1 \quad (101)$$

sein muß.

Da  $\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho_m$  im ungünstigsten Falle gleich dem größten Abstand eines Membranpunktes vom Koordinatenanfangspunkt ist, so besagt (100), daß der Aufpunktsabstand  $R$  groß gegen die größte lineare

Ausdehnung der strahlenden Fläche (in der  $XY$ -Ebene) sein muß. Aus (101) folgt dann, daß weiter

$$\frac{\pi \cdot Q_m^2}{\lambda \cdot R} \ll 1 \quad (102)$$

sein muß.

Bei kleinem  $\lambda$ , genauer, wenn  $\lambda \ll \pi R$  ist, ist daher die Bedingung (102) schärfer. Legen wir eine Kolbenmembran von 5 cm Radius zugrunde und setzen einmal eine Wellenlänge von 15 cm, das andere Mal eine Wellenlänge von 1 cm voraus, so würde der hinreichende Abstand  $R$  in einem Fall nach (100) durch:  $R \gg 5$  cm, dagegen im anderen Fall nach (102) durch:  $R \gg 75$  cm gegeben sein.

Bei zwei Strahlern, die klein zur Wellenlänge sind, tritt an Stelle der Integration in Formel (10) eine einfache Addition. Wir erhalten den Schalldruck des resultierenden Feldes in folgender Form:

$$p = e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{c \cdot \sigma}{2 \cdot \lambda} \left[ w_1 F_1 \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + w_2 F_2 \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]. \quad (103)$$

Dabei bedeuten:

$w_1, w_2$  die (mittleren) Geschwindigkeitsamplituden von  $F_1$  und  $F_2$ ,

$F_1, F_2$  die strahlenden Flächen,

$r_1, r_2$  die Abstände der Strahler vom Aufpunkt.

Führen wir noch die Abkürzungen ein:

$$\frac{w_1 F_1}{2 \lambda^2} = a, \quad \frac{w_2 F_2}{2 \lambda^2} = b, \quad \frac{r_1}{\lambda} = x, \quad \frac{r_2}{\lambda} = y,$$

so ergibt sich aus (103) für die Schalldruckamplitude  $p$  die Beziehung:

$$\frac{p}{c \cdot \sigma} = \left| \frac{a e^{-i2\pi x}}{x} + \frac{b e^{-i2\pi y}}{y} \right|. \quad (104)$$

Da wir die Phase außer Betracht lassen, haben wir den rechts stehenden Ausdruck nur seinem Betrage nach zu untersuchen. Wir erhalten durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{p}{c \sigma} = \sqrt{\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)^2 \cos^2 \pi(x - y) + \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right)^2 \sin^2 \pi(x - y)} \quad (105)$$

oder:

$$\frac{p}{c \cdot \sigma} = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \frac{2ab}{xy} \cos 2\pi(x - y)}.$$

Für bestimmte Werte von  $x - y$  nimmt  $\cos 2\pi(x - y)$  und daher auch  $\frac{p}{c \cdot \sigma}$  einfache Werte an, und zwar ergibt sich nachstehende Tabelle (S. 55).

So kann man für die auf den Hyperbeln  $x - y = \text{konstans}$  liegenden Punkte die zugehörigen Werte von  $p/c\sigma$  einfach berechnen und kann dann durch Interpolation von Zwischenwerten die Kurven gleichen Schalldrucks einzeichnen, wobei  $x$  und  $y$  die in Wellenlängen gemessenen Abstände des Aufpunktes von den beiden Strahlern bedeuten.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Festlegung der Stellen, wo die Schalldruckamplitude gleich Null ist. Dazu ist offenbar notwendig, daß  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  und  $x - y = \frac{2m+1}{2}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) ist. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $a > b$  vorausgesetzt werden.)

Daraus folgt:

$$x = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{2m+1}{2},$$

$$y = \frac{b}{a-b} \cdot \frac{2m+1}{2}.$$

Damit die mit  $x$  und  $y$  beschriebenen Kreise einen reellen Schnittpunkt ergeben, muß ferner bei einem Abstand  $d$  der beiden Strahler die Bedingung erfüllt sein:

$$x + y \geq d/\lambda \geq x - y,$$

d. h. es muß:

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2m+1}{2} \geq \frac{d}{\lambda} \geq \frac{2m+1}{2} \quad (106)$$

sein.

Jedem Wert von  $m$ , für den die Ungleichheit (106) erfüllt ist, entspricht eine Nullstelle des Schalldruckes. Im Fall  $d/\lambda < \frac{1}{2}$  gibt es daher überhaupt keine Nullstelle. Im Fall  $a = 2, b = 1, d/\lambda = 4$  ergeben sich aus  $3(2m+1) \geq 8 \geq 2m+1$  die Lösungen:  $m = 1, m = 2, m = 3$ . Im Fall  $a = 3, b = 2, d/\lambda = 1$  ergibt sich aus  $5(2m+1) \geq 2 \geq 2m+1$  die eine Lösung  $m = 0$ .

Die Abb. 44 stellt die Verhältnisse für  $d/\lambda = 5, a = 3$  und  $b = 2$  dar. Dabei sind die Hyperbeläste:

$$r_1 - r_2 = \lambda/2, 3/2\lambda, 5/2\lambda, 7/2\lambda, 9/2\lambda$$

und die auf ihnen liegenden Nullstellen

$$(1), (2), (3), (4)$$

gezeichnet. Die Nullstellen ergeben sich hier als Schnittpunkte der Kreise, die mit den Radien:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1}{\lambda} &= \frac{3(2m+1)}{10} \frac{d}{\lambda} \\ \frac{r_2}{\lambda} &= \frac{2(2m+1)}{10} \frac{d}{\lambda} \end{aligned} \right\} (m = 1, 2, 3, 4) \quad (107)$$