

Die einfachen Kugelstrahler höherer ( $n$ ter) Ordnung<sup>1</sup> werden dadurch gekennzeichnet, daß der Verlauf der Geschwindigkeitsamplitude  $w_n$  gegeben ist durch:

$$w_n = w_n \cdot P_n(\mu) e^{i\omega t}.$$

Der Schalldruck  $p_n$  in dem durch die Polarkoordinaten  $r, \gamma$  bestimmten Aufpunkt ist dann allgemein gegeben durch:

$$p_n = p^{(0)} w_n \cdot e^{i[\omega t + \pi/2 - k(r-r_0)]} \cdot \frac{f_n(ikr)}{F_n(ikr_0)} P_n(\mu). \quad (143)$$

Dabei bedeutet:

$$F_n(ix) = (1 + ix)f_n(ix) - ix f_n'(ix) \quad (144)$$

und

$$f_n(ix) = 1 + \frac{n(n+1)}{2ix} + \frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4 (ix)^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (ix)^n}. \quad (145)$$

Es empfiehlt sich an Stelle  $F_n(ix)$  und  $f_n(ix)$  die durch (127) (S. 69) definierten BESSELSchen Funktionen  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  einzuführen. Und zwar bestehen die Beziehungen:

$$i^{n+1} e^{-ix} f_n(ix) = S_n(x) + i C_n(x),$$

$$i^{n+1} e^{-ix} F_n(ix) = x S_{n+1}(x) - n S_n(x) + i[x C_{n+1}(x) - n C_n(x)].$$

Dann erhalten wir:

$$p_n = p^{(0)} \cdot w_n e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{S_n(kr) + i C_n(kr)}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} \cdot P_n(\mu). \quad (146)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned} U_n(x) &= x S_{n+1}(x) - n S_n(x), \\ V_n(x) &= x C_{n+1}(x) - n C_n(x). \end{aligned} \quad (147)$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \sin x - x \cos x, & V_0(x) &= \cos x + x \sin x, \\ U_1(x) &= (2/x - x) \sin x - 2 \cos x, & V_1(x) &= 2 \sin x + (2/x - x) \cos x \text{ usw.} \end{aligned}$$

Für den Kugelstrahler erster Ordnung ist die Geschwindigkeitsamplitude  $w_1$  gegeben durch:

$$w_1 = w_1 P_1(\mu) e^{i\omega t} = w_1 \cos \gamma \cdot e^{i\omega t}.$$

Dies entspricht der Bewegung einer als starres Ganzes hin- und herschwingenden Kugel. Der Schalldruck  $p_1$  ergibt sich hier durch:

$$\frac{p_1}{c \sigma \cdot w_1 \cdot e^{i[\omega t - k(r-r_0)]}} = \frac{k^2 r_0^2}{kr} \frac{i + \frac{1}{kr}}{2 + i \left( kr_0 - \frac{2}{kr_0} \right)} \cdot \cos \gamma$$

und die Schalldruckamplitude  $p_1$  durch:

$$\frac{p_1}{c \sigma w_1} = \frac{k^3 r_0^3}{\sqrt{4 + k^4 r_0^4}} \cdot \frac{1}{k^2 r^2} \sqrt{1 + k^2 r^2} \cos \gamma.$$

<sup>1</sup> RAYLEIGH: Theory of sound, § 323 u. ff.

Solange  $kr_0 \ll 1$  ist, wächst die Druckamplitude proportional mit  $k^3 r_0^3$ , solange  $kr_0 \gg 1$  ist, proportional mit  $kr_0$ . Bezeichnen wir die im Aufpunkt  $r = r_0$ ,  $\gamma = 0$  eintretende maximale Druckamplitude mit  $p_m$  und fragen nach den Kurven konstanter Druckamplitude:

$$p_1 = a p_m \quad (a = 1; 0,9; 0,8 \text{ usw.}),$$

so folgt:

$$\frac{p_1}{p_m} = \cos \gamma \cdot \frac{kr_0}{kr} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{k^2 r^2}}{1 + \frac{1}{k^2 r_0^2}}} = a.$$

Wählen wir als Beispiel  $kr_0 = 1$ , so folgt für die Aufpunkte auf der Symmetrieachse ( $\gamma = 0$ ):

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{kr} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2 r^2}}$$

und daraus:

$$kr = \frac{1}{2a} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8a^2}}.$$

Danach ergeben sich die Werte  $p_1/p_m$  auf der Mittelachse:

$p_1/p_m =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
für $r/r_0 =$	7,14	3,67	2,53	1,98	1,65	1,44	1,28	1,17	1,07	1

Denken wir uns dann die Kreise:

$$r = r_0, \quad r = 1,07 r_0, \quad r = 1,17 r_0, \quad r = 1,28 r_0 \text{ usw.}$$

beschrieben, so können wir auf ihnen durch Berechnung der  $\gamma$ -Werte leicht die Punkte für die verlangten Werte  $p_1/p_m$  angeben, z. B. auf dem Kreise  $r = 1,28 r_0$  für die Werte:

$p_1/p_m =$	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
die zugehörigen $\gamma$ Werte durch $\cos \gamma =$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Als weiteres Beispiel geben wir die entsprechende Tabelle für  $kr_0 = 5$ :

$p_1/p_m =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$r/r_0 =$	9,81	4,91	3,28	2,46	1,97	1,65	1,42	1,24	1,11	1

Für  $kr_0 \gg 1$  sind die entsprechenden Werte  $r/r_0$  einfach durch  $1/\frac{p_1}{p_m}$  gegeben, also:

$p_1/p_m =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$r/r_0 =$	10	5	3,33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	1

In der Abb. 65 sind die Kurven konstanten Schalldruckes für den Kugelstrahler erster Ordnung (mit  $kr_0 = 1$ ) gezeichnet. Infolge der zur Äquatorebene vorgegebenen antisymmetrischen Verteilung der Ge-

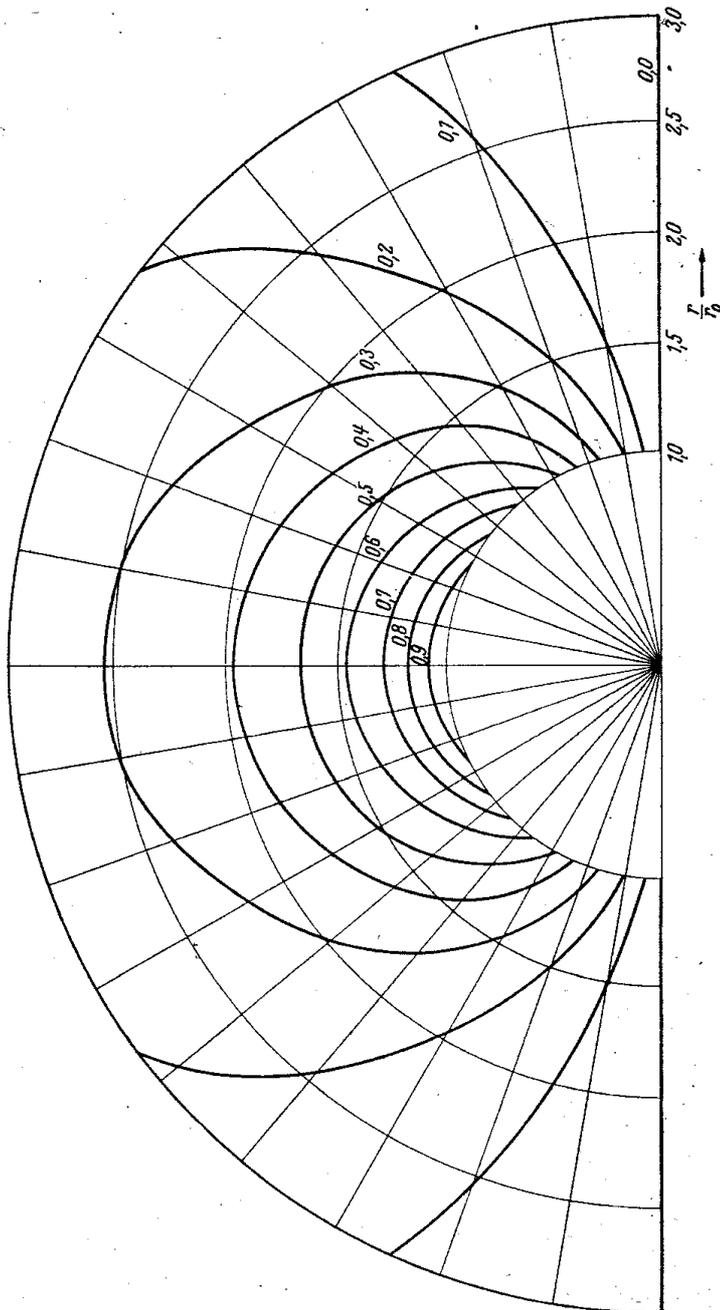


Abb. 65. Kurven konstanten Schalldruckes ( $p/p_m$ ) beim Strahler erster Ordnung.

schwindigkeitsamplitude ist der Charakter des Feldes gegenüber dem des Nullstrahlers wesentlich verschieden, da in der Äquatorebene jetzt die Druckamplitude gleich Null ist.

Für den Kugelstrahler  $n$ ter Ordnung ergibt sich aus (143) die Schalldruckamplitude  $p_n$  durch:

$$p_n = p^0 \cdot w_n \sqrt{\frac{S_n^2(kr) + C_n^2(kr)}{U_n^2(kr_0) + V_n^2(kr_0)}} P_n(\cos \gamma),$$

dabei ist:

$n =$	0	1	2	3
$S_n^2(x) + C_n^2(x)$	1	$1/x^2 + 1$	$(1 - 3/x^2)^2 + (3/x)^2$	$(1 - 15/x^2)^2 + (6/x + 15/x^3)^2$
$U_n^2(x) + V_n^2(x)$	$1 + x^2$	$x^2 + 4/x^2$	$(4 - 9/x^2)^2 + (x - 9/x)^2$	$(7 - 60/x^2)^2 + (x - 27/x + 60/x^3)^2$

Bemerkenswert ist, daß der Richtungseinfluß, d. h. das Verhältnis der Schalldruckamplitude in einem beliebigen Aufpunkt  $(r, \gamma)$  zu der Druckamplitude im Aufpunkt im gleichen Abstand  $r$  auf der Symmetrieachse  $(r, \gamma = 0)$  unabhängig von  $r$  einfach durch  $P_n(\cos \gamma)$  gegeben ist, so daß der Verlauf des Schallfeldes sich ohne Schwierigkeit aus den Werten auf der Symmetrieachse ergibt. Insbesondere bestimmen die Knotenlinien  $P_n(\cos \gamma) = 0$ , in denen die Geschwindigkeitsamplitude auf der strahlenden Kugel gleich Null ist, ganz allgemein die Kegelflächen im Raum, für welche die Druckamplitude im Raum gleich Null ist.

Von einer Durchführung der Rechnung für Kugelstrahler höherer Ordnung soll abgesehen werden, da praktisch kaum Fälle vorkommen, in denen ein Strahler sich wie ein Kugelstrahler höherer Ordnung verhält.

## 6. Der zusammengesetzte Kugelstrahler.

Wichtig für das Folgende ist die Untersuchung des Schallfeldes, das durch eine Kombination einer Reihe von Kugelstrahlern verschiedener Ordnung hervorgerufen wird. Und zwar ergibt sich hier für eine Kugel mit dem Radius  $r_0$ , deren Geschwindigkeitsamplitude  $w$  durch eine Superposition von Kugelfunktionen dargestellt ist,

$$w = [A_0 P_0(\cos \gamma) + A_1 P_1(\cos \gamma) + \dots + A_n P_n(\cos \gamma)] e^{i\omega t} \quad (148)$$

der resultierende Schalldruck einfach durch die entsprechende Superposition des von den einzelnen Kugelstrahlern herrührenden Schalldruckes. Der Schalldruck  $p$  ist dann im Aufpunkt  $(r, \gamma)$  gegeben durch:

$$p = p^{(0)} e^{i(\omega t + \pi/2)} \sum_{m=0}^n \frac{S_m(kr) + iC_m(kr)}{U_m(kr_0) + iV_m(kr_0)} A_m P_m(\cos \gamma). \quad (149)$$

Dabei sind die  $A_m$  konstante Größen, die gegebenenfalls (um verschiedenen Phasen Rechnung zu tragen) komplex sein können. Die Hauptbedeutung dieses Satzes liegt aber in seiner Umkehrung. Im allgemeinen liegt die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung nicht in der Form (148) vor. Und das Wesentliche ist nun, daß nach dem Ent-

wicklungssatz der Kugelfunktionen eine (bis auf allgemeine Stetigkeitsforderungen) willkürliche Funktion auf der Kugeloberfläche in der Form (148) dargestellt werden kann.

Damit ist dann die Berechnung des Schallfeldes bei einer auf der Kugel willkürlich vorgegebenen Geschwindigkeitsamplitude möglich. Wir wollen dies an einem speziellen Beispiel erläutern.

Auf einer starren unbeweglichen Kugel soll für einen Teil (Kugelkappe), der durch  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$  bestimmt ist, eine konstante Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$  vorgeschrieben sein, während für den übrigen

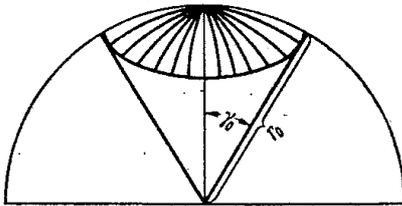


Abb. 66. Die strahlende Kugelkappe.

Teil  $w = 0$  ist (Abb. 66). Wir haben dann zunächst die Aufgabe, die Koeffizienten  $A_m$  der Funktion

$$w = A_0 P_0(\cos \gamma) + A_1 P_1(\cos \gamma) + \dots \quad (150)$$

zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} w &= 1 \text{ für } 0^\circ \leq \gamma \leq \gamma_0, \\ w &= 0 \text{ für } \gamma_0 < \gamma \leq 180^\circ \end{aligned}$$

ist. Dazu dienen die Orthogonalitätsbeziehungen der Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu &= 0, & \text{für } m \neq n \\ \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Indem wir die Gleichung (150) auf beiden Seiten mit  $P_n(\mu)$  multiplizieren und von  $-1$  bis  $+1$  integrieren, erhalten wir sofort:

$$\int_{-1}^{+1} w P_n(\mu) d\mu = A_n \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu = A_n \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

und damit allgemein:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} w P_n(\mu) d\mu.$$

In unserem Beispiel ist nun  $w$  nur im Bereich  $\cos \gamma_0 \leq \mu \leq 1$  von Null verschieden, so daß:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\cos \gamma_0}^1 P_n(\mu) d\mu$$

ist. Wegen der bekannten Beziehung der Kugelfunktionen:

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] \quad (151)$$

folgt:

$$(2n+1) \int_x^1 P_n(\mu) d\mu = P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x), \quad (n \geq 1) \quad (152)$$

$$\int_x^1 P_0(\mu) d\mu = 1 - x.$$

So ergibt sich die gesuchte Darstellung für  $w$ :

$$w = \frac{1 - \cos \gamma_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)] P_n(\cos \gamma) \quad (153)$$

und damit auch der gesuchte Schalldruck nach (149) durch Einsetzen der gefundenen Werte für  $A_n$ .

Wählen wir als speziellen Fall eine strahlende Halbkugel mit konstanter Geschwindigkeitsamplitude  $w = 1$ , die durch eine starre Halbkugel, auf der  $w = 0$  ist, abgeschlossen ist, so haben wir  $\cos \gamma_0 = \cos 90^\circ = 0$  zu setzen. Wegen

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

und  $P_{2n+1}(0) = 0$  finden wir:

$$w = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} P_1(\cos \gamma) - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} P_3(\cos \gamma) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{11}{12} P_5(\cos \gamma) + \dots$$

und für eine strahlende Kugelkappe mit  $\gamma_0 = 60^\circ$  ist:

$$\begin{aligned} w = & 0,250 + 0,563 P_1(\cos \gamma) + 0,469 P_2(\cos \gamma) + 0,082 P_3(\cos \gamma) \\ & - 0,264 P_4(\cos \gamma) - 0,306 P_5(\cos \gamma) - 0,067 P_6(\cos \gamma) \\ & + 0,198 P_7(\cos \gamma) + 0,245 P_8(\cos \gamma) + 0,057 P_9(\cos \gamma) - \dots \end{aligned}$$

In den Abb. 67 und 68 sind die entsprechenden Annäherungskurven:

$$w^{(n)} = \sum_{m=0}^{m=n} a_m P_m(\cos \gamma)$$

dargestellt. Für  $\gamma = 0^\circ$  läßt sich die Abweichung der Annäherungsfunktion von dem Sollwert 1 angeben. Da wegen  $P_m(1) = 1$  in  $w^{(n)}$  sich alle Glieder außer den beiden ersten und den beiden letzten wegheben, so ist:

$$w_{(\gamma=0^\circ)}^{(n)} = 1 - \frac{P_{n-1}(\cos \gamma_0) + P_n(\cos \gamma_0)}{2}$$

Im vorliegenden Fall  $\gamma_0 = 90^\circ$  ergibt sich also der Fehler gleich  $\frac{P_{n-1}(0) + P_n(0)}{2}$ , also für  $n = 0, 1, 2 \dots$  usw. gleich:  $+\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ,  $+\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$  usw.

Um einen besseren Anschluß an die frühere Formel zu bekommen, wollen wir zur Darstellung der durch  $\gamma_0$  bestimmten strahlenden Kugelkappe mit konstanter Geschwindigkeitsamplitude  $w$  die strahlende

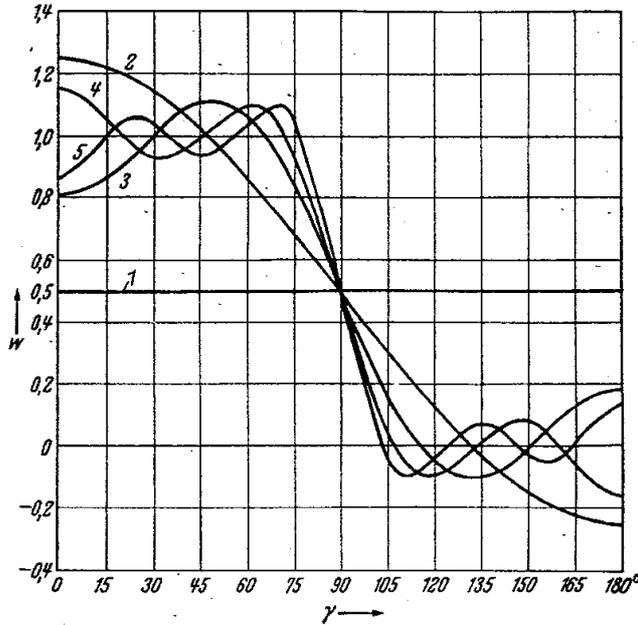


Abb. 67. Annäherung der Funktion  $w = \begin{cases} 1 & (0 \leq \gamma \leq 90^\circ) \\ 0 & (90^\circ < \gamma \leq 180^\circ) \end{cases}$  durch Kugelfunktionen.

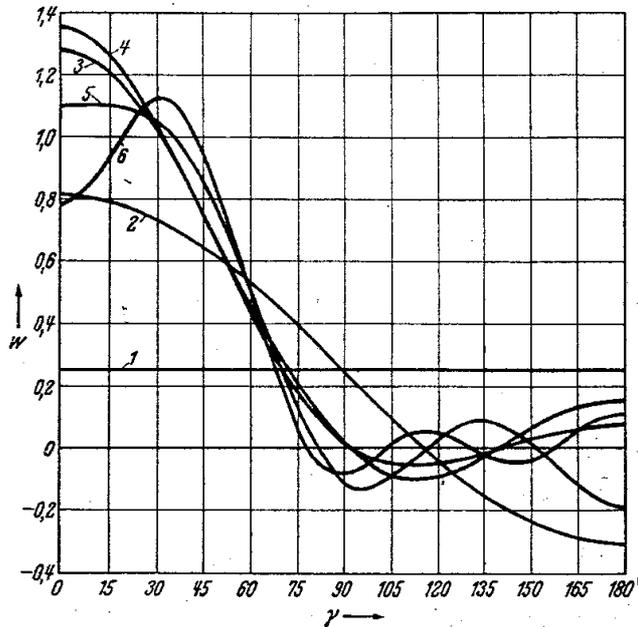


Abb. 68. Annäherung der Funktion  $w = \begin{cases} 1 & (0 \leq \gamma \leq 60^\circ) \\ 0 & (60^\circ < \gamma \leq 180^\circ) \end{cases}$  durch Kugelfunktionen.

Fläche  $F = 2\pi r_0^2(1 - \cos \gamma_0)$  einführen und den Schalldruck  $p$  in der Form schreiben:

$$p = c\sigma e^{i(\omega t + \pi/2)} \frac{F \cdot w}{2\lambda r} \cdot \mathfrak{P}(r, r_0, \mu, \mu_0).$$

Dabei ist:  $p_0 = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2 \cdot r}$  die Druckamplitude, wenn die Dimensionen des Strahlers klein zur Wellenlänge sind und:

$$\mathfrak{P}(r, r_0, \mu, \mu_0) = \frac{S_0(kr) + iC_0(kr)}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)] \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)}. \quad (154)$$

Ein praktisch wichtiger Fall, der bereits von RAYLEIGH behandelt wurde, liegt vor, wenn die strahlende Fläche sehr klein ist, so daß  $\mu_0 = \cos \gamma_0$  durch 1 ersetzt werden kann. Dann wird die Formel (154) unbrauchbar. Doch können wir diesen Nachteil leicht beseitigen, wenn wir bedenken, daß wegen (151):

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1 - \mu_0} [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)] \right\} = 2n + 1$$

ist. Wir erhalten dann für einen *punktförmigen* Strahler auf einer starren Kugel

$$p = p_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)} \mathfrak{P}(r, r_0, \mu, 1), \quad (155)$$

wobei:

$$\mathfrak{P}(r, r_0, \mu, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(\mu) \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)}$$

ist. Eine wesentliche Vereinfachung der Formeln tritt ein, wenn der Aufpunkt in so großer Entfernung  $r$  liegt, daß  $f_n(ikr) = 1$  gesetzt werden kann. Wegen  $S_n(x) + iC_n(x) = i^{n+1} e^{-ix} f_n(ix)$  geht dann  $S_n(kr) + iC_n(kr)$  über in  $i^{n+1} e^{-ikr}$ .

Wir erhalten dann:  $p = p_0 \cdot e^{i(\omega t - kr)} f(\gamma, \gamma_0)$ , wobei:

$$f(\gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{P_n(\mu) [P_{n-1}(\mu_0) - P_{n+1}(\mu_0)]}{U_n(kr_0) + iV_n(kr_0)} \quad (156)$$

ist.

Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, bei der Summation die Glieder mit geradem  $n$  und ungeradem  $n$  zusammenzufassen, indem wir schreiben:

$$f(\gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0(kr_0) + iV_0(kr_0)} + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{S}_1 + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{S}_2, \quad (157)$$

wobei  $\mathfrak{S}_1$  die Kugelfunktionen  $P_2(\mu), P_4(\mu), \dots$  usw. und  $\mathfrak{S}_2$  die Kugelfunktionen  $P_1(\mu), P_3(\mu), \dots$  usw. enthält. Dann ist wegen  $P_{2n}(-\mu) = P_{2n}(\mu)$  und  $P_{2n+1}(-\mu) = -P_{2n+1}(\mu)$ :

$$f(180^\circ - \gamma, \gamma_0) = \frac{i}{U_0 + iV_0} + \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{S}_1 - \frac{1}{1 - \mu_0} \mathfrak{S}_2 \quad (158)$$

und

$$f(\gamma, 180^\circ - \gamma_0) = \frac{i}{U_0 + iV_0} - \frac{1}{1 + \mu_0} \mathfrak{S}_1 + \frac{1}{1 + \mu_0} \mathfrak{S}_2. \quad (159)$$

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(10) + iV_n(10)} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)].$$

$n$	$\gamma_0 = 10^\circ$	$\gamma_0 = 20^\circ$	$\gamma_0 = 30^\circ$	$\gamma_0 = 40^\circ$
0	-0,0009+0,0012 $i$	-0,0037+0,0047 $i$	-0,0083+0,0104 $i$	-0,0145+0,0182 $i$
2	-0,0062+0,0042 $i$	-0,0230+0,0154 $i$	-0,0454+0,0304 $i$	-0,0664+0,0444 $i$
4	-0,0131-0,0018 $i$	-0,0408-0,0057 $i$	-0,0569-0,0080 $i$	-0,0409-0,0058 $i$
6	-0,0043-0,0183 $i$	-0,0097-0,0414 $i$	-0,0048-0,0204 $i$	+0,0082+0,0349 $i$
8	+0,0244-0,0001 $i$	+0,0307-0,0001 $i$	-0,0277+0,0001 $i$	-0,0491+0,0002 $i$
10	-0,0230+0,0086 $i$	-0,0055+0,0020 $i$	+0,0397-0,0149 $i$	-0,0135+0,0051 $i$
12	+0,0071-0,0003 $i$	-0,0048+0,0002 $i$	-0,0053+0,0003 $i$	+0,0131-0,0006 $i$
14	-0,0010	+0,0014	-0,0009	-0,0001
16	+0,0001	-0,0002	+0,0002	-0,0002
$\Sigma_1$	-0,0171-0,0066 $i$	-0,0557-0,0249 $i$	-0,1095-0,0023 $i$	-0,1634+0,0964 $i$
1	-0,0032-0,0032 $i$	-0,0123+0,0125 $i$	-0,0263+0,0267 $i$	-0,0434+0,0442 $i$
3	-0,0100+0,0029 $i$	-0,0344+0,0099 $i$	-0,0593+0,0170 $i$	-0,0689+0,0198 $i$
5	-0,0125-0,0100 $i$	-0,0339-0,0272 $i$	-0,0335-0,0268 $i$	-0,0004-0,0003 $i$
7	+0,0118-0,0181 $i$	+0,0209-0,0320 $i$	-0,0023+0,0035 $i$	-0,0298+0,0457 $i$
9	+0,0089+0,0249 $i$	+0,0066+0,0186 $i$	-0,0147-0,0423 $i$	-0,0071-0,0197 $i$
11	-0,0026-0,0153 $i$	+0,0006+0,0037 $i$	+0,0037+0,0214 $i$	-0,0042-0,0243 $i$
13	+0,0000+0,0029 $i$	-0,0029 $i$	+0,0002 $i$	+0,0036 $i$
15	-0,0003 $i$	+0,0005 $i$	-0,0005 $i$	+0,0004 $i$
17				-0,0001 $i$
$\Sigma_2$	-0,0076-0,0098 $i$	-0,0525-0,0171 $i$	-0,1324+0,0003 $i$	-0,1538+0,0694 $i$
$\Sigma_1 + \Sigma_2$	-0,0247-0,0165 $i$	-0,1083-0,0419 $i$	-0,2419-0,0019 $i$	-0,3172+0,1658 $i$
$\Sigma_1 - \Sigma_2$	-0,0095+0,0032 $i$	-0,0032-0,0078 $i$	+0,0228-0,0024 $i$	-0,0097+0,0269 $i$
$f(0, \gamma_0)$	-1,625-1,084 $i$	-1,795 -0,695 $i$	-1,806 -0,014 $i$	-1,356 +0,709 $i$
$f(180^\circ, \gamma_0)$	-0,623+0,212 $i$	-0,052 -0,128 $i$	+0,170 -0,018 $i$	-0,041 +0,115 $i$

Die entsprechenden Beziehungen gelten offenbar auch für Aufpunkte, die nicht in großem Abstand liegen. Wir haben also nur nötig, die Berechnung für  $0 \leq \gamma \leq 90^\circ$ ,  $0 \leq \gamma_0 \leq 90^\circ$  durchzuführen; die Werte für  $90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$  und  $90^\circ \leq \gamma_0 \leq 180^\circ$  ergeben sich dann aus (158) (159).

Physikalisch bedeutet (156) und (157), daß man eine beliebige Geschwindigkeitsverteilung auf der Kugeloberfläche durch eine zur Äquatorebene symmetrische und eine zur Äquatorebene antisymmetrische Verteilung ersetzen kann. Die erste enthält die Kugelfunktionen gerader, die zweite die Kugelfunktionen ungerader Ordnung. Man findet nach (158) den Schalldruck in dem Spiegelpunkt eines Aufpunktes, in dem man in der Formel für den Aufpunkt den antisymmetrischen Anteil mit entgegengesetztem Vorzeichen einsetzt. Ferner folgt aus (158) und (159):

$$(1 - \mu_0)f(180^\circ - \gamma, \gamma_0) + (1 + \mu_0)f(\gamma, 180^\circ - \gamma_0) = \frac{2i}{U_0 + iV_0}.$$

Das besagt, daß die zu (158) und (159) gehörende Strahlung zusammen die Strahlung eines Kugelstrahlers nullter Ordnung ergibt.

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(10) + i V_n(10)} [P_{n-1}(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)].$$

$\gamma_0 = 50^\circ$	$\gamma_0 = 60^\circ$	$\gamma_0 = 70^\circ$	$\gamma_0 = 80^\circ$	$\gamma_0 = 90^\circ$
-0,0222+0,0277 i	-0,0211+0,0388 i	-0,0409+0,0511 i	-0,0514+0,0642 i	-0,0622+0,0777 i
-0,0791+0,0529 i	-0,0787+0,0526 i	-0,0633+0,0424 i	-0,0353+0,0236 i	— —
+0,0047+0,0007 i	+0,0547+0,0077 i	+0,0769+0,0108 i	+0,0548+0,0077 i	— —
+0,0139+0,0590 i	+0,0034+0,0146 i	-0,0123-0,0521 i	-0,0145-0,0617 i	— —
+0,0228-0,0001 i	+0,0617-0,0003 i	-0,0127+0,0001 i	-0,0683+0,0003 i	— —
-0,0417+0,0157 i	+0,0376-0,0141 i	+0,0265-0,0099 i	-0,0538+0,0202 i	— —
-0,0095+0,0005 i	-0,0037+0,0002 i	+0,0150-0,0007 i	-0,0135+0,0006 i	— —
+0,0013	-0,0022	+0,0023	-0,0014	— —
+0,0002	-0,0002	+0,0001	+0,0001	— —
-0,1096+0,1564 i	+0,0416+0,0995 i	-0,0084+0,0416 i	-0,1832+0,0550 i	-0,0622+0,0777 i
-0,0617+0,0628 i	-0,0788+0,0802 i	-0,0928+0,0945 i	-0,1019+0,1037 i	-0,1051+0,1069 i
-0,0539+0,0155 i	-0,0161+0,0046 i	+0,0316-0,0091 i	+0,0710-0,0204 i	+0,0862-0,0248 i
+0,0407+0,0327 i	+0,0516+0,0413 i	+0,0179+0,0144 i	-0,0335-0,0268 i	-0,0579-0,0464 i
-0,0154+0,0236 i	+0,0256-0,0393 i	+0,0314-0,0482 i	-0,0100+0,0154 i	-0,0378+0,0580 i
+0,0192+0,0538 i	+0,0051+0,0142 i	-0,0221-0,0618 i	-0,0018-0,0051 i	+0,0231+0,0646 i
-0,0008-0,0046 i	+0,0055+0,0322 i	-0,0039-0,0227 i	-0,0026-0,0149 i	+0,0062+0,0360 i
-0,0058 i	+0,0044 i	-0,0001 i	+0,0001+0,0046 i	+0,0001+0,0066 i
-0,0001 i	-0,0002 i	+0,0005 i	-0,0008 i	+0,0009 i
-0,0001 i	-0,0001 i	+0,0001 i	-0,0001 i	+0,0001 i
-0,0718+0,1779 i	-0,0072+0,1376 i	-0,0379-0,0325 i	-0,0788+0,0556 i	-0,0852+0,2019 i
-0,1815+0,3343 i	+0,0345+0,2371 i	-0,0463+0,0090 i	-0,2620+0,1106 i	-0,1474+0,2797 i
-0,0378-0,0214 i	+0,0487-0,0380 i	+0,0295+0,0741 i	+0,1044-0,0006 i	+0,0230-0,1243 i
-0,508+0,936 i	+0,069 +0,474 i	-0,070 +0,014 i	-0,317 +0,134 i	-0,147 +0,280 i
-0,106-0,061 i	+0,097 -0,076 i	+0,045 +0,113 i	+0,126 -0,001 i	+0,023 -0,124 i

Als Beispiel sind in der *Tabelle* die Ausdrücke

$$\frac{i^{n+1}}{U_n(kr_0) + i V_n(kr_0)} [P_n(\cos \gamma_0) - P_{n+1}(\cos \gamma_0)] = A_n + i B_n$$

für  $kr_0 = 10$  und  $\gamma_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 90^\circ$  ausführlich angegeben und die entsprechenden Werte  $f(\gamma, \gamma_0)$  für  $\gamma = 0^\circ$  und  $\gamma = 180^\circ$  berechnet.

In der Abb. 69 ist  $f(0^\circ, \gamma_0)$  und  $f(180^\circ, \gamma_0)$  dem Betrage nach dargestellt. Diese Kurven geben dann eine Übersicht über die Druckamplituden in der Hauptrichtung ( $\gamma = 0^\circ$ ) und in der Gegenrichtung ( $\gamma = 180^\circ$ ) in Abhängigkeit von der Größe der strahlenden Fläche ( $\gamma_0$ ) bei gleichem Deformationsvolumen ( $F \cdot w$ ). Wir erkennen zunächst, daß bei kleinen  $\gamma_0$  in der Hauptrichtung die doppelte Amplitude vorhanden ist gegenüber der Amplitude bei ungebündelter Strahlung ( $p_0 = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2 \lambda r}$ ). Will man eine möglichst große strahlende Fläche, möglichst große Druckamplitude in der Hauptrichtung und gleichzeitig möglichst gute Abschattung für die Gegenrichtung erzielen, so lehrt die Abbildung, daß dies für  $\gamma_0$  etwa gleich  $20^\circ$  erreicht wird.

An Hand der Tabelle für  $A_n + iB_n$  ist dann leicht für jedes  $\gamma_0$  das vollständige Schallfeld (bei großer Entfernung des Aufpunktes) zu berechnen. Man hat nur noch nötig, die Ausdrücke:

$$R + iJ = \frac{1}{1 - \mu_0} \sum (A_n + iB_n) P_n(\cos \gamma)$$

auszurechnen und  $\sqrt{R^2 + J^2}$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  aufzutragen. Die den Werten  $\gamma_0 = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 170^\circ$  entsprechenden

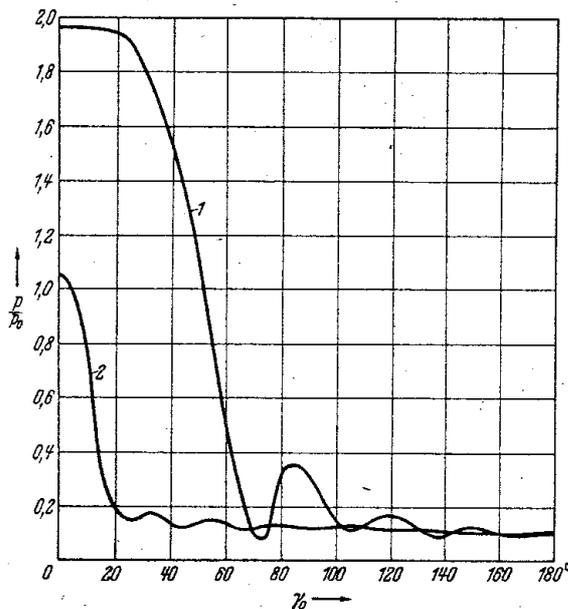


Abb. 69. Druckamplitude in Abhängigkeit von dem zur strahlenden Fläche gehörenden Zentriwinkel  $\gamma_0$  bei konstantem Deformationsvolumen 1. für die Hauptrichtung ( $\gamma = 0^\circ$ ), 2. für die Gegenrichtung ( $\gamma = 180^\circ$ ).

Komponenten  $R, J$  sind in den Abb. 70 bis 76 gezeichnet und die daraus erhaltenen relativen Schalldruckamplituden in den Abb. 77 bis 83 zur Darstellung gebracht.

Solange die strahlende Fläche klein ist, wird man mit wachsendem  $\gamma_0$  eine ähnliche Richtwirkung wie bei einer Kolbenmembran erwarten können. Bei größerem  $\gamma_0$  ( $\gamma_0 > 90^\circ$ ) wird sich die Strahlung allmählich der eines ungerichteten Strahlers nähern, um bei  $\gamma_0 = 180^\circ$  mit dem Kugelstrahler nullter Ordnung identisch zu werden. Die Anzahl der Glieder, die berechnet werden müssen, um das Ergebnis mit hinreichender Genauigkeit zu erhalten, wächst etwa proportional mit der Größe von  $kr_0$ . Und zwar ergibt sich, daß die einzelnen Glieder schnell abnehmen, sobald  $n$  größer als  $kr_0$  geworden ist, so daß die notwendige Anzahl zwischen  $kr_0$  und  $2kr_0$  liegt. Das hängt mit einer allgemeinen Eigenschaft der auftretenden BESSELSCHEN Funktionen zusammen, die ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen, wenn man die Funktionswerte bei festem Argument in Abhängigkeit vom Index  $n$  aufträgt.

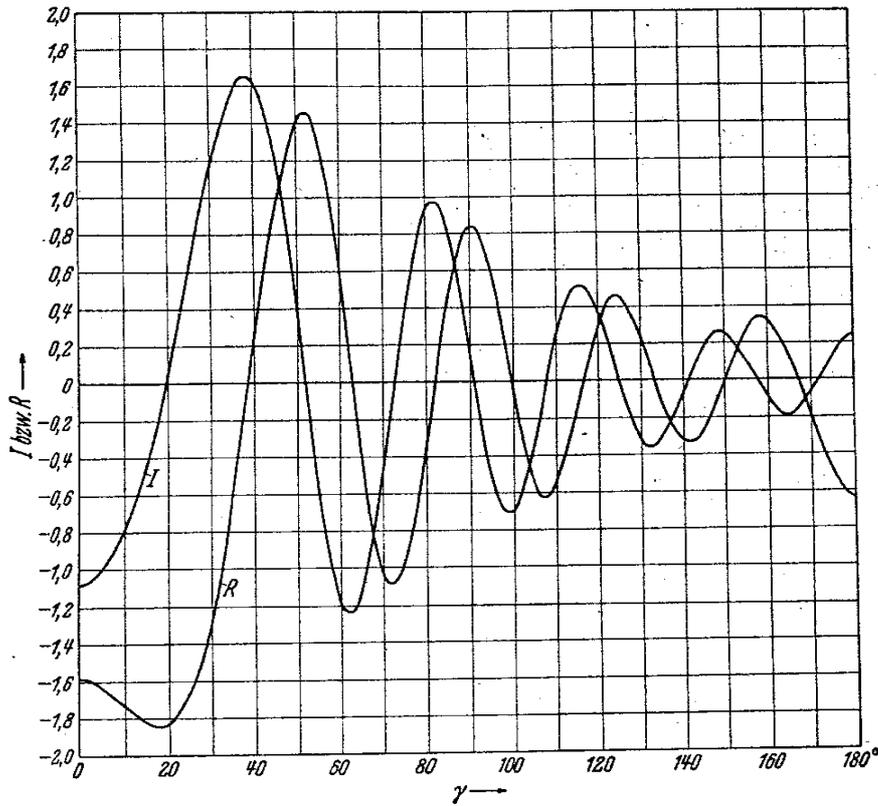


Abb. 70. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 10^\circ$ .

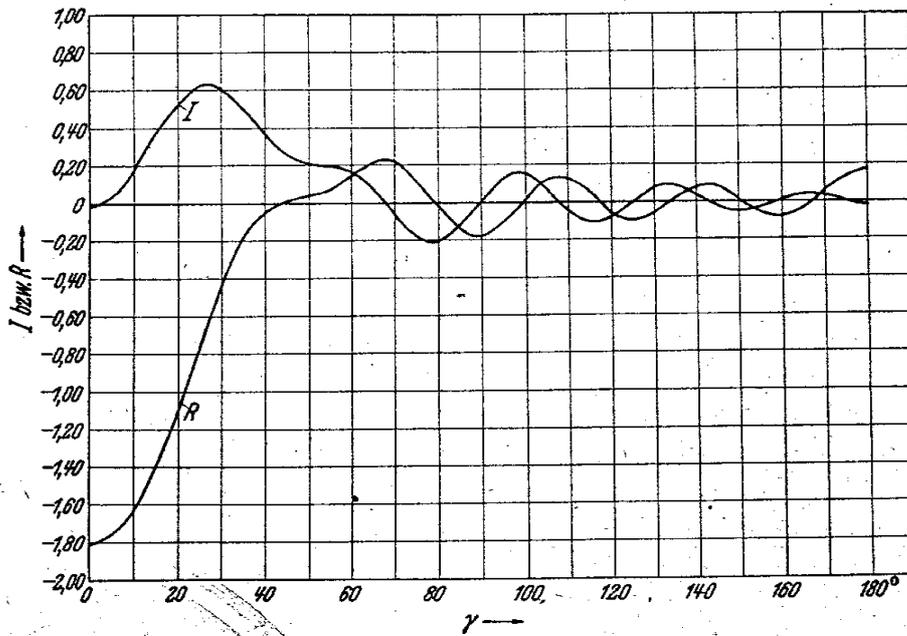


Abb. 71. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 30^\circ$ .

Das Schallfeld des Kugelstrahlers.

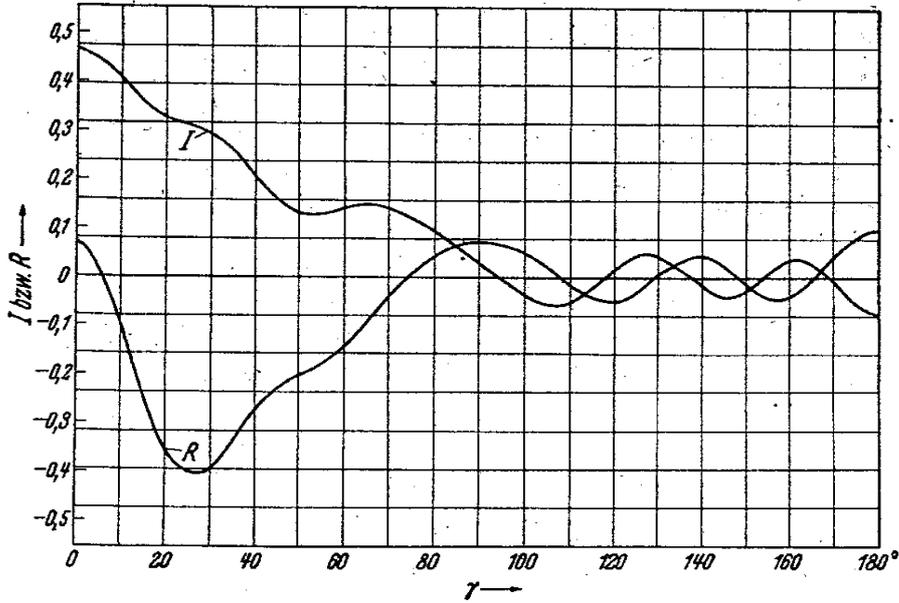


Abb. 72. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 60^\circ$ .

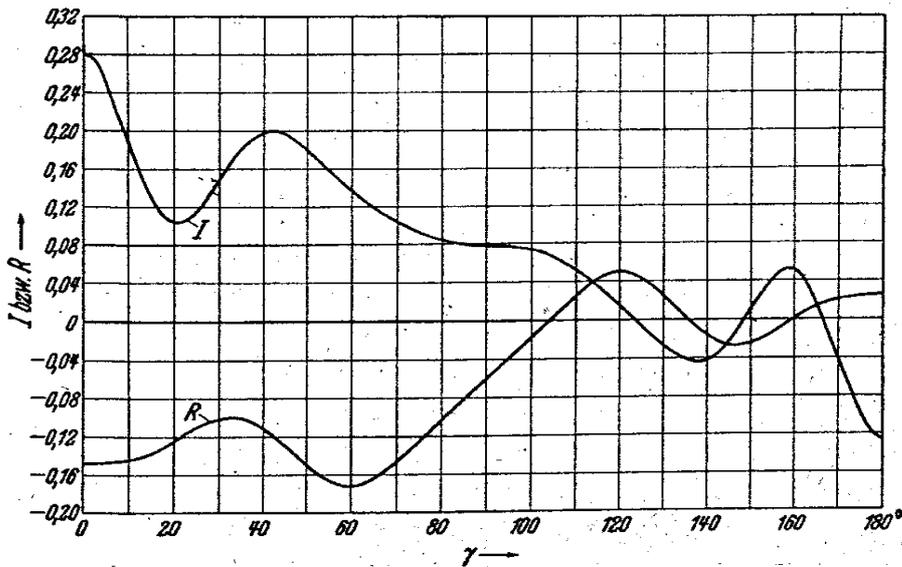


Abb. 73. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 90^\circ$ .

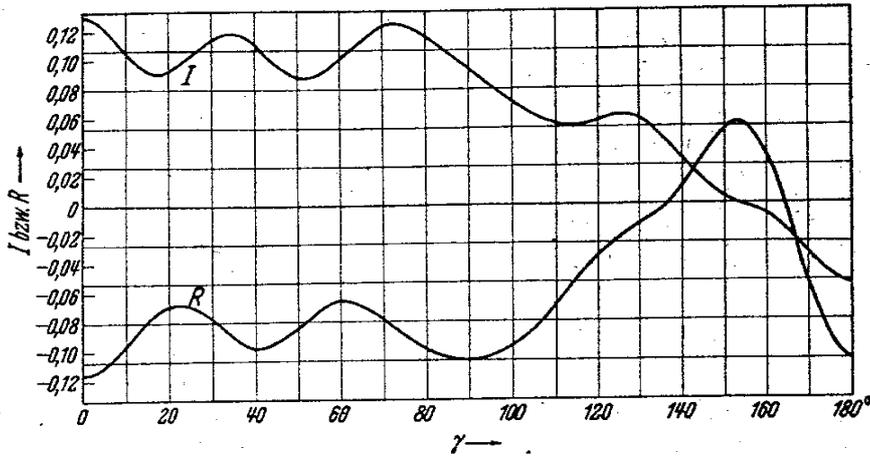


Abb. 74. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 120^\circ$ .

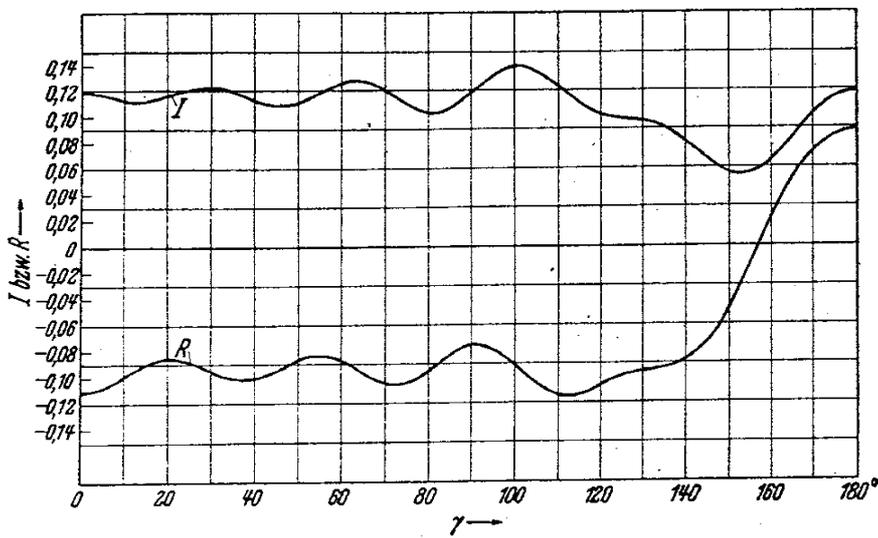


Abb. 75. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 150^\circ$ .

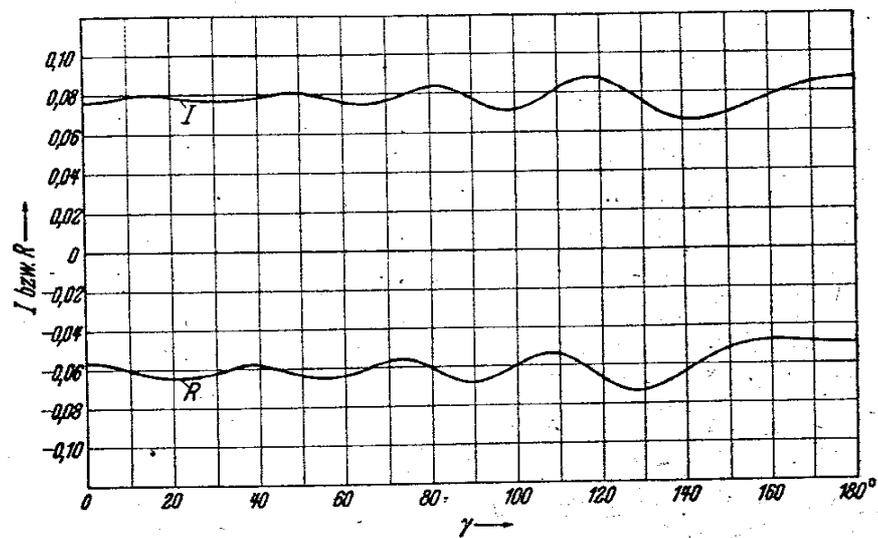


Abb. 76. Die Komponenten des Schalldruckes für  $\gamma_0 = 170^\circ$ .

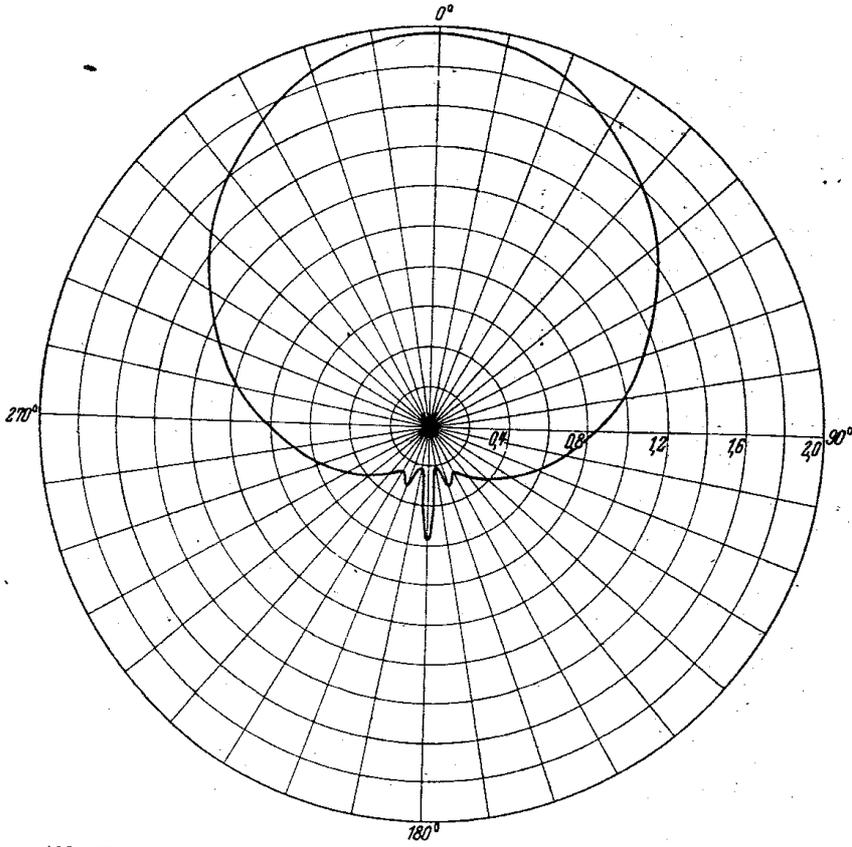


Abb. 77. Schalldruckamplitude ( $p/p_0$ ) bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 10^\circ$ ).

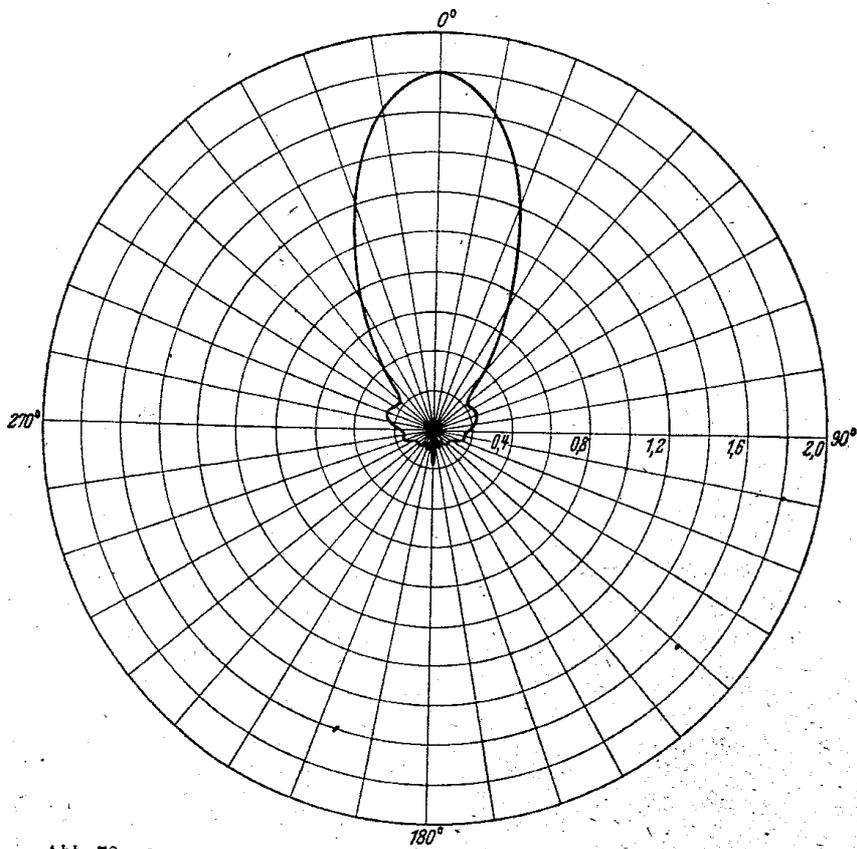


Abb. 78. Schalldruckamplitude ( $p/p_0$ ) bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 20^\circ$ ).

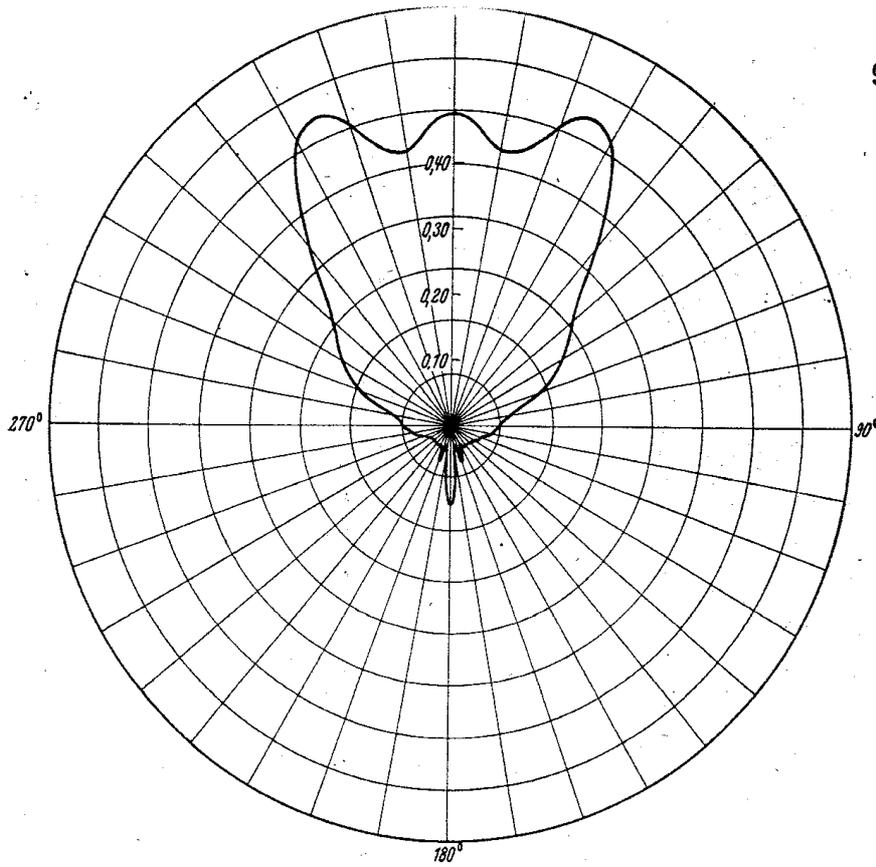
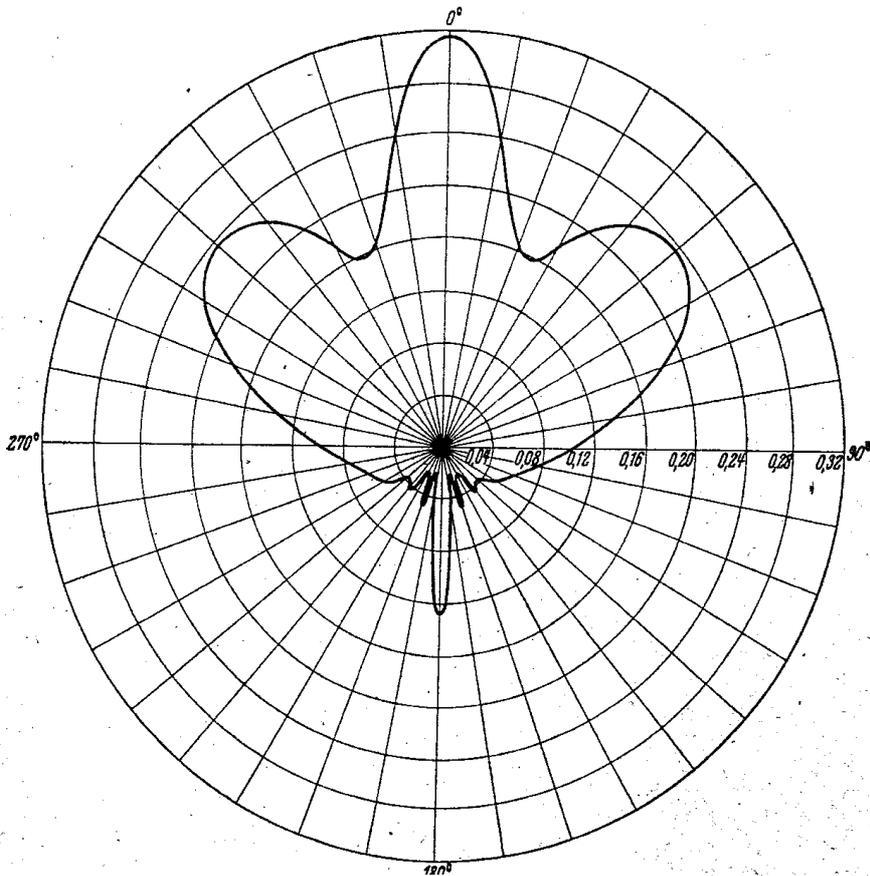


Abb. 79. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 60^\circ$ ).



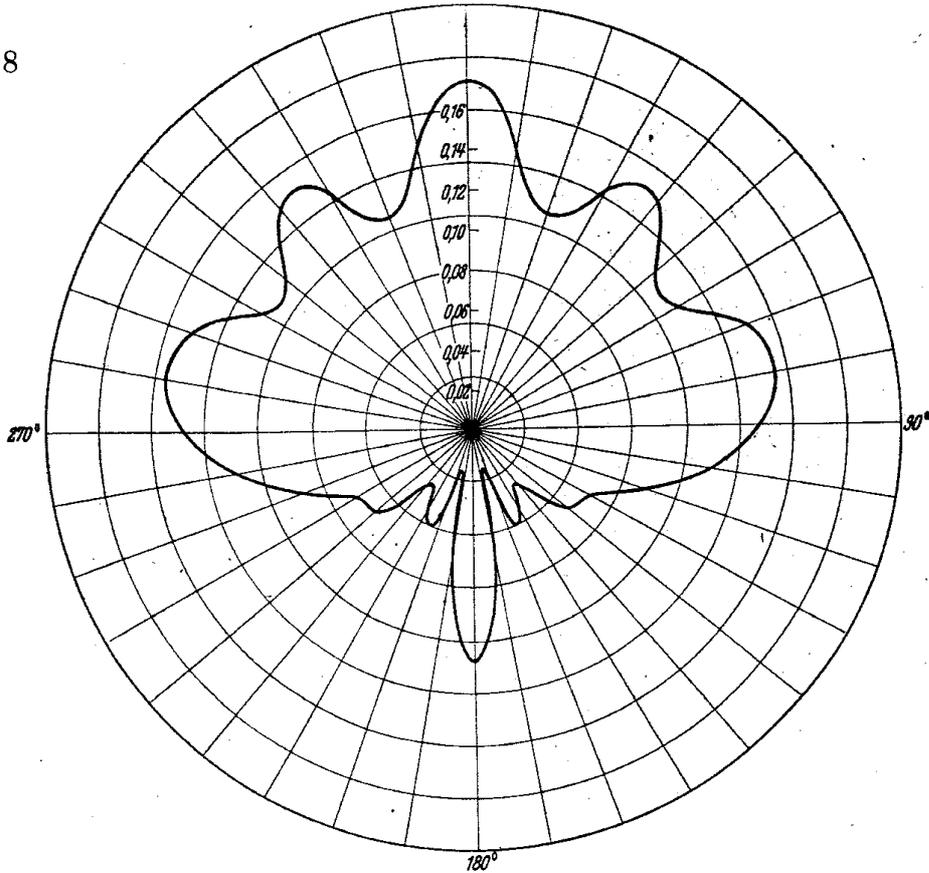
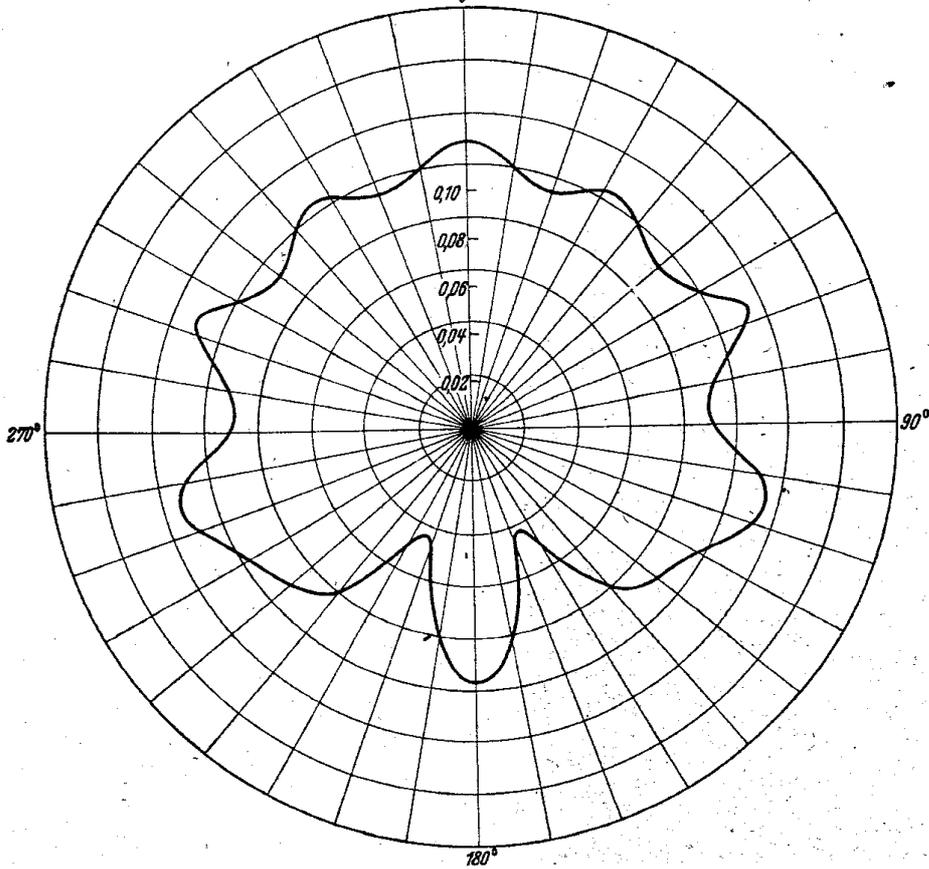


Abb. 81. Schalldruckamplitude  $(p/p_0)$  bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 120^\circ$ ).



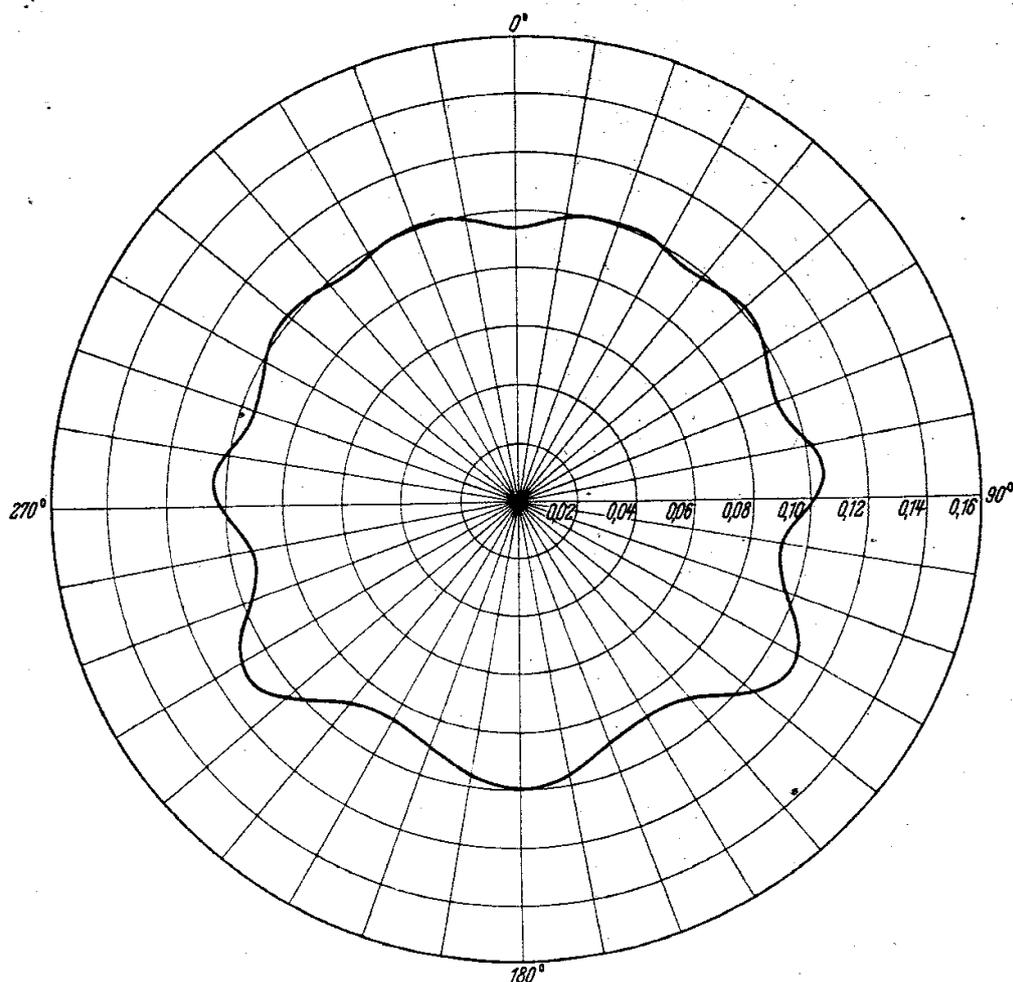


Abb. 83. Schalldruckamplitude ( $p/p_0$ ) bei strahlender Kugelkappe ( $\gamma_0 = 170^\circ$ ).

Solange  $n < x$  ist, schwankt  $S_n(x)$  und  $C_n(x)$  zwischen positiven und negativen Werten; sobald  $n > x$  geworden ist, nimmt  $S_n(x)$  monoton stark ab, während  $C_n(x)$  monoton stark zunimmt. Dasselbe gilt für  $U_n(x)$  und  $V_n(x)$ . In den Abb. 84 bis 86 sind  $U_n(x)$  und  $V_n(x)$  für  $x = 4, 10, 20, 40$  in Abhängigkeit von  $n$  dargestellt.

Als Beispiel für den allgemeinen Fall, wo der Aufpunkt in der Nähe des Strahlers liegt, wählen wir:

$$kr_0 = 5, r = 2r_0 \text{ (d. h. } kr = 10), \gamma_0 = 30^\circ$$

und berechnen die Tabelle (S. 100):

$$a_n = \frac{[P_{n-1}(\cos 30^\circ) - P_{n+1}(\cos 30^\circ)][S_n(10) + iC_n(10)]}{(1 - \cos 30^\circ)[U_n(5) + iV_n(5)]} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Schalldruckamplitude  $p$  im Aufpunkt  $r = 2r_0, \gamma = 0$  erhalten wir daraus:

$$p = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2r \cdot \lambda} |2,03 + 2,24i| = \frac{c \cdot \sigma F \cdot w}{2r \lambda} \cdot 3,01.$$

$n$	$\frac{[P_{n-1}(\cos 30^\circ) - P_{n+1}(\cos 30^\circ)] [S_n(10) + i C_n(10)]}{(1 - \cos 30^\circ) [U_n(5) + i V_n(5)]}$
0	+0,1953 - 0,0177 $i$
2	+0,8175 + 0,2193 $i$
4	+0,2525 + 0,9462 $i$
6	-0,1490 - 0,0467 $i$
8	-0,0074 + 0,0228 $i$
10	-0,0035 + 0,0017 $i$
12	-0,0002
$\Sigma_1$	+1,1052 + 1,1256 $i$
1	+0,5607 + 0,0128 $i$
3	+0,7937 + 0,6199 $i$
5	-0,4259 + 0,4596 $i$
7	+0,0041 + 0,0106 $i$
9	-0,0087 + 0,0073 $i$
11	-0,0009 + 0,0021 $i$
$\Sigma_2$	+0,9230 + 1,1104 $i$
$\Sigma_1 + \Sigma_2$	+2,0282 + 2,2360 $i$

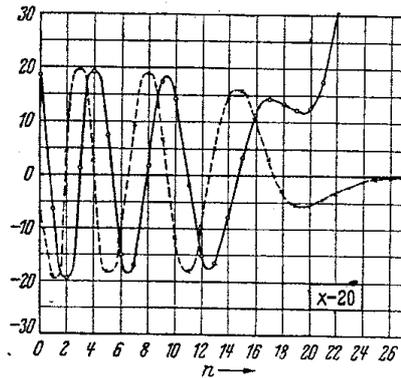
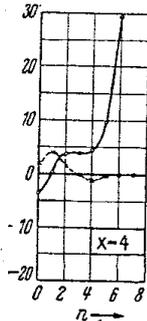
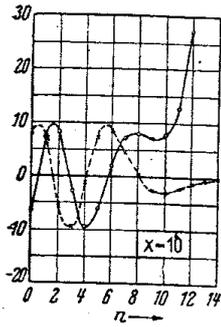


Abb. 84.

Abb. 85.

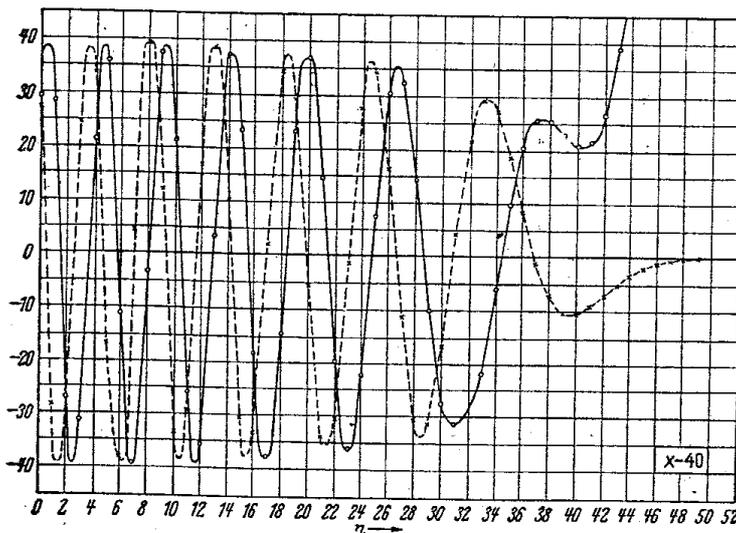


Abb. 86.

Abb. 84—86.  
Die Hilfsfunktionen  $U_n(x)$  (gestrichelt) und  $V_n(x)$  (ausgezogen) für  $x = 4, 10, 20, 40$  in Abhängigkeit von  $n$ .

$$a_n = (2n + 1) \frac{S_n(kr) + iC_n(kr)}{U_n(1) + iV_n(1)}$$

$n$	$kr=1,5$	$kr=2$	$kr=3$	$kr=4$	$kr=5$
0	+0,1991 - 0,6785 $i$	-0,1506 - 0,6909 $i$	-0,6627 - 0,2466 $i$	-0,5656 + 0,4244 $i$	+0,0516 + 0,6997 $i$
2	+1,1068 - 0,1143 $i$	+0,7754 - 0,2198 $i$	+0,4188 - 0,4800 $i$	-0,0265 - 0,5854 $i$	-0,4416 - 0,3517 $i$
4	+0,4026 - 0,0001 $i$	+0,1466 - 0,0005 $i$	+0,0453 - 0,0028 $i$	+0,0257 - 0,0082 $i$	+0,0153 - 0,0154 $i$
6	+0,1750	+0,0338	+0,0038	+0,0010	+0,0005
8	+0,0774	+0,0082	+0,0004		
10	+0,0344	+0,0020			
12	+0,0153	+0,0005			
14	+0,0068	+0,0001			
16	+0,0030				
18	+0,0013				
$\sum_1$	+1,9844 - 0,7929 $i$	+0,8160 - 0,9112 $i$	-0,1944 - 0,7294 $i$	-0,5654 - 0,1692 $i$	-0,3742 + 0,3326 $i$
1	+1,3082 - 0,9426 $i$	+0,8104 - 1,2622 $i$	-0,4008 - 1,3563 $i$	-1,2942 - 0,4875 $i$	-1,1353 + 0,7637 $i$
3	+0,6317 - 0,0050 $i$	+0,3299 - 0,0136 $i$	+0,1694 - 0,0508 $i$	+0,0972 - 0,1019 $i$	+0,0085 - 0,1277 $i$
5	+0,2643	+0,0695	+0,0114 - 0,0001 $i$	+0,0050 - 0,0004 $i$	+0,0030 - 0,0010 $i$
7	+0,1163	+0,0166	+0,0012	+0,0002	+0,0001
9	+0,0516	+0,0041	+0,0001		
11	+0,0229	+0,0010			
13	+0,0102	+0,0003			
15	+0,0045				
17	+0,0020				
19	+0,0009				
$\sum_2$	+2,4133 - 0,9476 $i$	+1,2318 - 1,2758 $i$	-0,1917 - 1,4072 $i$	-1,1918 - 0,5898 $i$	-1,1237 + 0,6350 $i$