

CAP. 1. Analisi deterministica.

1.0 - Introduzione.

L'analisi deterministica comprende i metodi di rappresentazione delle funzioni determinate, definite cioè matematicamente mediante una o più variabili reali o complesse e che siano invarianti nel tempo.

Si possono avere diversi metodi di rappresentazione di uno stesso fenomeno, a seconda del dominio nel quale viene compiuta l'analisi. Ad esempio un segnale può essere indifferentemente rappresentato nel dominio del tempo o della frequenza. Il passaggio dall'uno all'altro viene ottenuto mediante opportune trasformazioni.

La scelta del dominio di rappresentazione viene spesso determinata dall'uso che di questa si deve fare. Alla base dei metodi di trasformazione vi è l'analisi armonica di Fourier.

1.1 - Serie armonica di Fourier.

Questo metodo consente lo sviluppo in una serie di un numero infinito di termini di una generica funzione del tempo $f(t)$ che soddisfi alle seguenti condizioni:

- a)- che tale funzione sia illimitata nel tempo, vale a dire si estenda da $-\infty$ a $+\infty$.

Si possono distinguere due casi: il segnale è periodico di periodo T ; il segnale non è periodico ed è "non nullo" nell'intervallo $0-T$ e nullo al di fuori di esso; in tal caso si può considerare il segnale di periodo $T=\infty$.

b) - L'energia della funzione nel periodo T sia finita; ovvero $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$; (ove con T si intenda genericamente anche il periodo definito nel caso di funzione non periodica).

c) - La funzione sia integrabile; ovvero $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$

d) - Inoltre la funzione deve essere univoca, o \grave{e} continua, presentare un numero finito di discontinuità e di massimi e minimi in un periodo, avere valori finiti ovunque, ovvero punti d'infinito integrabili.

Quando sono soddisfatte queste condizioni, la $f(t)$ è esprimibile nella forma:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin n\omega_1 t \quad (1-1)$$

ove $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ è la pulsazione fondamentale o frequenza angolare.

A_n e B_n sono i coefficienti della serie e sono ottenibili dalle seguenti proprietà di ortogonalità delle funzioni trigonometriche:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_1 t \cdot \cos n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1/2 & \text{per } m = n \neq 0 \\ 1 & \text{per } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_1 t \cdot \sin n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1/2 & \text{per } m = n \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_1 t \cdot \cos n\omega_1 t dt = 0 \quad (1-2)$$

Si ottiene allora:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt; \quad (1-3)$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt;$$

La funzione risulta sviluppata mediante la (1-1) nel suo valore medio $A_0/2$, più due serie di termini oscillatori, una in coseno e la altra in seno, aventi frequenza armonica di ordine n rispetto alla fondamentale (ove n si estende da 1 a ∞).

Altra rappresentazione equivalente è quella che fa uso degli esponenziali complessi: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \quad (1-4)$

$$\text{ove } D_n = \frac{1}{2} (A_n - jB_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt$$

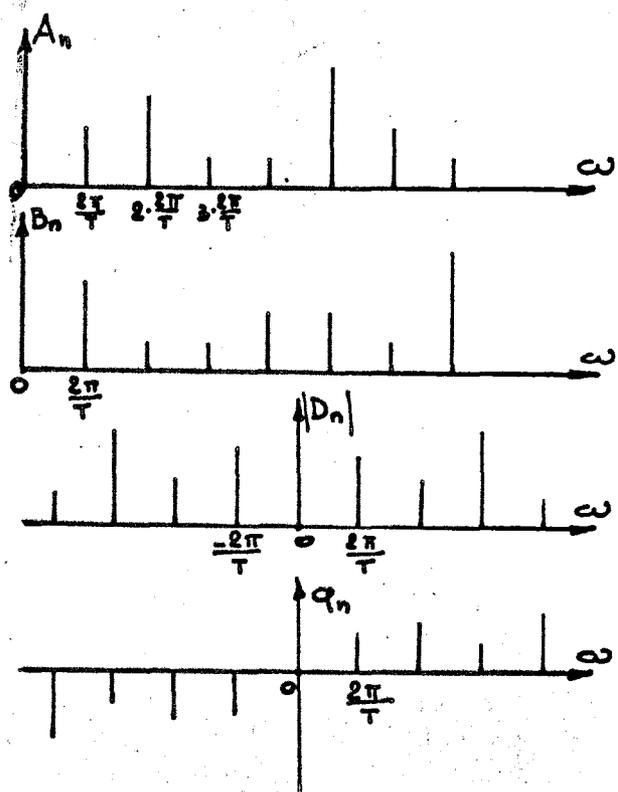
$$D_{-n} = D_n^* = \frac{1}{2} (A_n + jB_n)$$

(ove * (1-5) significa complesso coniugato) ./.

Le rappresentazioni (1-1) ed (1-4) differiscono nel fatto che nella prima si considerano due serie di termini in seno e coseno, la cui frequenza si estende da 0 a $+\infty$, mentre nella seconda si considera una sola serie di termini complessi la cui frequenza si estende da $-\infty$ a $+\infty$.

Ogni coppia di termini dello stesso ordine n nella (1-4) rappresenta infatti nel piano complesso due vettori ruotanti in senso opposto con velocità angolare $n\omega$, e di fasi $\varphi_n = \text{arccotang}\left(-\frac{B_n}{A_n}\right) e \varphi_n =$ della somma di questi due termini complessi si annullano i termini immaginari a seguito delle (1-5).

Nella Figura 1 sono riportate le due rappresentazioni equivalenti (1-1) e (1-4).



rappresentazione grafica secondo la (1-1)

$$0 \leq \omega \leq +\infty$$

genericamente $A_n \neq B_n$

rappresentazione secondo la (1-4)

$$-\infty \leq \omega \leq +\infty$$

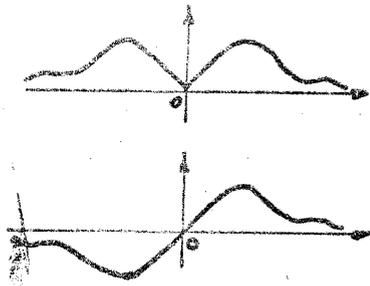
$$D_n = (D-n)^*$$

$|D_n|$ è una funzione pari
 φ_n è una funzione dispari

Fig. 1

Riferendoci alla notazione (1-1), se $f(t)$ è una funzione pari, allora è $A_n \neq 0$ e $B_n = 0$; se $f(t)$ è dispari, allora $A_n = 0$ e $B_n \neq 0$,

(Fig. 2).



$f(t)$ pari

$$A_n \neq 0, B_n = 0;$$

$f(t)$ dispari

$$A_n = 0, B_n \neq 0;$$

Fig. 2

1.2 - Completezza della rappresentazione di Fourier.

La misura di tale completezza si ottiene esaminando l'errore \mathcal{E}_N che si compie considerando un numero finito $n = N$ di termini della serie; tale errore viene considerato dal punto di vista energetico nel periodo T ; è cioè un errore quadratico medio e può esprimersi con:

$$\mathcal{E}_N = \int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) - \sum_{-N}^N D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \right|^2 \cdot dt \quad (1-6)$$

Dall'espressione di \mathcal{E}_N si ottiene l'espressione dei coefficienti D_n che rendono \mathcal{E}_N minimo. E' dimostrabile che l'espressione (1-5) dei D_n secondo lo sviluppo di Fourier è l'unica che soddisfa a tale condizione.

Accettando perciò le (1-4) e (1-5), si accetta conversamente la proprietà della serie di Fourier di minimizzare l'errore quadratico medio. Questo tende a zero per $N \rightarrow \infty$.

Dalla (1-6) si ottiene allora il Teorema di Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \cdot dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |D_n|^2 \quad (1-7)$$

Questo dice che l'energia della funzione $f(t)$ è uguale alla somma delle energie delle singole componenti lo sviluppo in serie.

./...

La serie di Fourier è l'unica rappresentazione che mostri come la energia è distribuita nella frequenza.

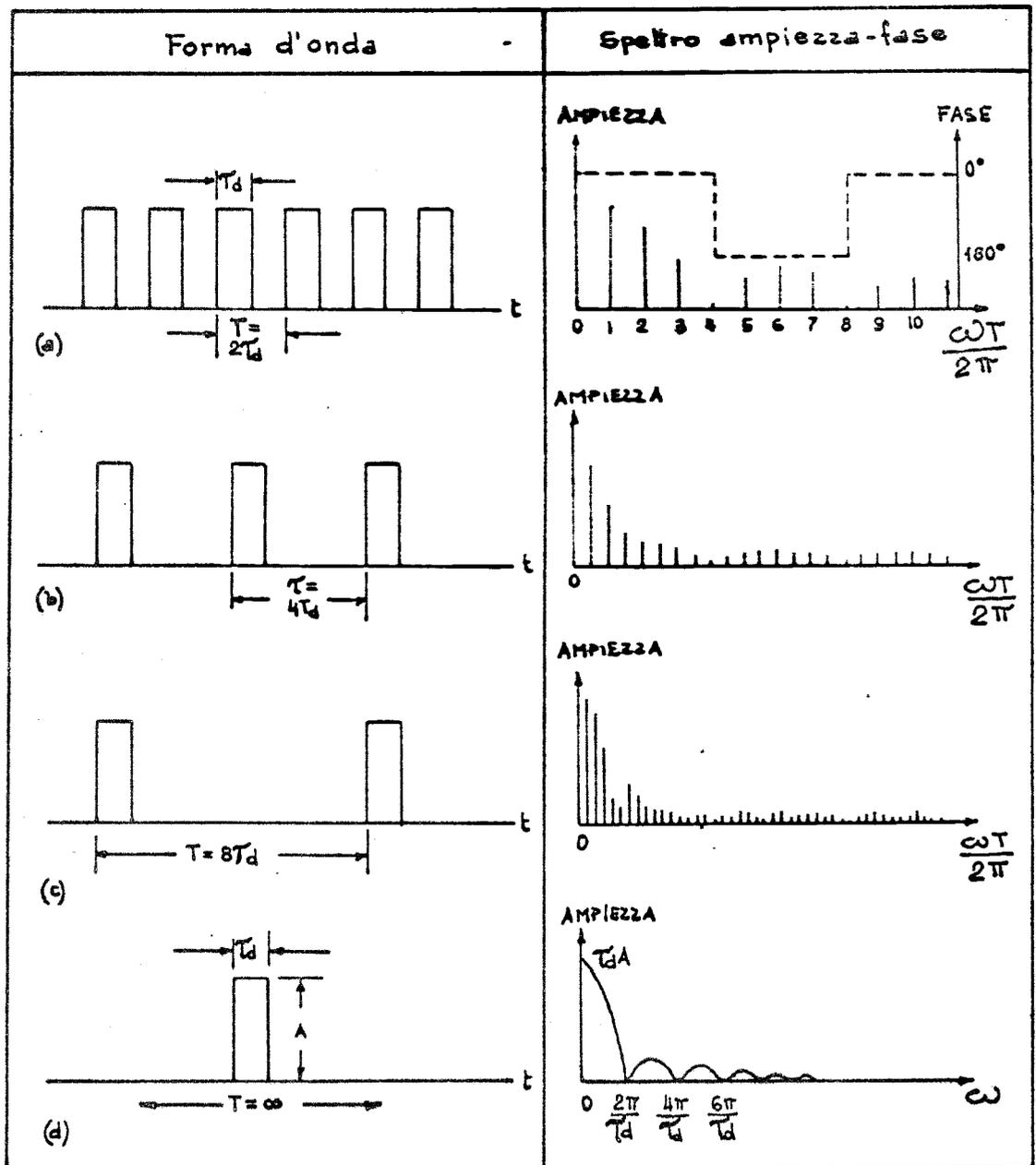


Fig. 3

DA BIBLIOGRAFIA N° 4

1.3 - L'Integrale di Fourier.

Nei primi tre casi della Fig. 3 è mostrato lo spettro di frequenza di un treno periodico di impulsi, e di un impulso non periodico nel quarto caso. La rappresentazione riportata è quella di ampiezza-fase, equivalente alle (1-1) e (1-4), e della forma:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |D_n| \cdot \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1-8)$$

./...

Si noti nella figura 4 come lo spettro diventa più ricco di componenti all'aumentare del periodo T. Al limite, quando il periodo tende all'infinito, lo spettro diventa continuo e la (1-5) diviene l'Integrale di Fourier.

Infatti posto:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{D_n}{1/T} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

si ottiene:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (1-9)$$

ove ω è al posto di $n\omega_1$

Si ottiene poi dalla (1-4): $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-10)$

Le espressioni (1-9) e (1-10) rappresentano le formule di invenzione di Fourier. $F(\omega)$ rappresenta lo spettro di frequenza generalmente complesso che è determinato dalla completa storia di $f(t)$, essendo l'integrale (1-9) esteso da $-\infty$ a $+\infty$. $f(t)$ ed $F(\omega)$ si dicono trasformate secondo Fourier ed è in uso la notazione: $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$.

Come nel caso di spettro discontinuo si ha il teorema di Parseval, si ha qui il teorema di Plancherel: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt; (1-11)$

Si noti che $|f(t)|^2$ rappresenta qui la potenza istantanea del segnale ed $|F(\omega)|^2$ lo spettro di energia.

1.4 - Alcune proprietà delle trasformate di Fourier - Trasformazioni di funzioni causali e di funzioni analitiche.-

Generalmente sia $f(t)$ che $F(\omega)$ possono considerarsi di forma complessa:

$$f(t) = f_1(t) + jf_2(t) = S(t) \cdot e^{j\psi(t)}; \quad (1-12)$$

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (1-12)$$

Si ha con tali notazioni:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) \sin \omega t - f_2(t) \cos \omega t] dt = R(\omega) + jX(\omega); \quad (1-13)$$

Inversamente $f(t) = f_1(t) + j f_2(t)$, ove:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (1-14)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega$$

Vediamo ora alcuni casi particolari:

a) $f(t) = f_1(t)$ è una funzione reale; è allora:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

(1-15)

Da ciò si deduce che $R(\omega)$ è una funzione pari ed $X(\omega)$ dispari.

E' cioè:

$$R(-\omega) = R(\omega); \quad X(-\omega) = -X(\omega); \quad F(-\omega) = F^*(\omega).$$

$$\text{Diversamente si ottiene: } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)] d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

(1-16)

Se in particolare è

$$\dots\dots f(t) \text{ pari: } R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad X(\omega) = 0;$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega;$$

(1-17)

cioè anche $F(\omega)$ è reale e pari.

$$\dots\dots f(t) \text{ dispari: } R(\omega) = 0; \quad X(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt;$$

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega;$$

(1-18)

cioè $F(\omega)$ è immaginario e dispari.

b) $f(t) = j f_2(t)$ è una funzione immaginaria; allora:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \sin \omega t dt; \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \cos \omega t dt;$$

(1-19)

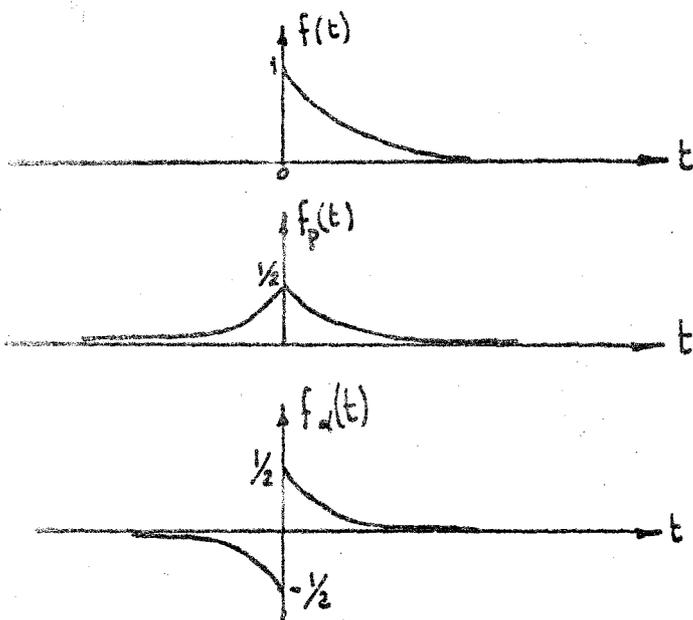
./...

Da ciò si deduce che $R(\omega)$ è una funzione dispari ed $X(\omega)$ una funzione pari; cioè:

$$R(-\omega) = -R(\omega); \quad X(-\omega) = X(\omega); \quad F(-\omega) = -F^*(\omega)$$

c) $f(t)$ è una funzione causale ⁽¹⁾, ovvero è $f(t) = 0$ per $t < 0$ e la funzione è non nulla solo per $t \geq 0$. In tal caso la $f(t)$ può essere decomposta nella somma di due funzioni, (Fig. 4), una pari $f_p(t)$ ed una dispari $f_d(t)$, tali che:

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}; \quad f_d(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}; \quad (1-20)$$



$$f(t) = f_p(t) + f_d(t)$$

Fig. 4

Per queste due funzioni $f_p(t)$ ed $f_d(t)$ valgono rispettivamente le trasformazioni (1-17) ed (1-18).

In questo caso la $f(t)$ può essere espressa solo mediante $R(\omega)$ oppure $X(\omega)$.

Infatti, essendo $f(-t) = 0$ per $t > 0$, si ha

$$f(t) = 2f_p(t) = 2f_d(t) \quad (\text{per } t > 0) \quad (1-21)$$

(1) Sono funzioni causali quelle associabili con dei sistemi fisici passivi perciò causali, i quali presentano una funzione d'uscita non nulla solo in presenza di una causa perturbatrice d'ingresso. La risposta impulsiva di un filtro elettrico è una funzione causale.

Dalla (1-21) e dalle (1-17) ed (1-18) deriva che:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (1-22)$$

Per $t = 0$ si ha, dalla (1-16):

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{f(0^+)}{2} \quad (1-23)$$

Dalla (1-22) si deduce che, nel caso di funzioni causali, $R(\omega)$ ed $X(\omega)$ sono tra loro dipendenti ed è sufficiente la conoscenza di una di esse per la univoca conoscenza di $f(t)$.

Dalla (1-15), sostituendo alla $f(t)$ l'espressione (1-22), si ottiene:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} X(y) \sin yt \cos \omega t dy dt; \\ X(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R(y) \cos yt \sin \omega t dy dt \end{aligned} \quad (1-24)$$

I casi a), b) ed c) possono ora analogamente riesaminarsi nel dominio della frequenza, nel caso che le suddette ipotesi vengono riferite alla funzione $F(\omega)$.

a') $F(\omega) = R(\omega)$ è una funzione reale; allora:

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t) + jf_2(t) \text{ ove: } f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega; \\ f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \sin \omega t d\omega; \end{aligned} \quad (1-25)$$

Da ciò si deduce che $f_1(t)$ è una funzione pari ed $f_2(t)$ una funzione dispari, cioè:

$$f_1(-t) = f_1(t); \quad f_2(-t) = -f_2(t); \quad f(-t) = f^*(t)$$

./...

Inversamente si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] \cdot dt = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} S(t) \cdot \cos[\omega t + \psi(t)] \cdot dt = \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]; \quad (1-25)
 \end{aligned}$$

Nel caso particolare che sia

..... $F(\omega)$ pari: $f_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$; $f_2(t) = 0$

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_1(t) \cos \omega t dt; \quad (1-27)$$

cioè anche $f(t)$ è reale e pari.

..... $F(\omega)$ dispari: $f_1(t) = 0$; $f_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \sin \omega t d\omega$;

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_2(t) \sin \omega t dt; \quad (1-28)$$

cioè $f(t)$ è immaginaria e dispari.

b') $F(\omega) = jX(\omega)$ è una funzione immaginaria; allora:

$$f_1(t) = -1/2\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega; \quad f_2(t) = 1/2\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cos \omega t d\omega; \quad (1-29)$$

Da ciò si deduce che $f_1(t)$ è una funzione dispari ed $f_2(t)$ è una funzione pari.

c') $F(\omega) = 0$ per $\omega < 0$, ed $F(\omega)$ non nulla per $\omega \geq 0$.

E' questo il caso analogo, nel dominio della frequenza, a quello delle funzioni causali del comma c), con la differenza che la $F(\omega)$ è qui considerata genericamente complessa, ovvero:

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad \text{per } \omega \geq 0, F(\omega) = 0 \quad \text{per } \omega < 0.$$

Sia la parte reale $R(\omega)$ che quella immaginaria $X(\omega)$ possono decomponersi nella somma di una funzione pari e di una dispari, cioè:

$$R(\omega) = R_p(\omega) + R_d(\omega); \quad X(\omega) = X_p(\omega) + X_d(\omega)$$

$$\text{ove: } \begin{cases} R_p(\omega) = 1/2 \cdot [R(\omega) + R(-\omega)] & ; R_d(\omega) = 1/2 \cdot [R(\omega) - R(-\omega)] \\ X_p(\omega) = 1/2 \cdot [X(\omega) + X(-\omega)] & ; X_d(\omega) = 1/2 \cdot [X(\omega) - X(-\omega)]; \end{cases} \quad (1-30)$$

La $F(\omega)$ può ora essere scritta nella forma seguente:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= R_p + R_d + j X_p + j X_d = [R_p + j X_d] + [R_d + j X_p] = \\ &= [R_p + j X_d] + j [X_p - j R_d] = [R_1(\omega) + j X_1(\omega)] + j [R_2(\omega) + j X_2(\omega)] = \\ &= F_1(\omega) + j F_2(\omega); \end{aligned} \quad (1-31)$$

La (1-31) mostra che lo spettro $F(\omega)$ può considerarsi decomposto nella somma complessa di due spettri $F_1(\omega)$ ed $F_2(\omega)$. Quindi la funzione $f(t)$, trasformata di $F(\omega)$, potrà anch'essa considerarsi decomposta nella somma complessa di due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, tali che:

$$f(t) = f_1(t) + j f_2(t) \iff F(\omega) = F_1(\omega) + j F_2(\omega)$$

$$f_1(t) \iff F_1(\omega); \quad f_2(t) \iff F_2(\omega) \quad (1-32)$$

E' ora interessante ricavare le relazioni che intercorrono tra $f_1(t)$ ed $f_2(t)$, in base a quelle tra $F_1(\omega)$ ed $F_2(\omega)$.

Intanto le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ sono entrambe reali, essendo $R_1(\omega) = R_p(\omega)$ ed $R_2(\omega) = X_p(\omega)$ funzioni pari, ed $X_1(\omega) = X_d(\omega)$ ed $X_2(\omega) = -R_d(\omega)$ funzioni dispari.

Inoltre si ha dalle (1-30):

$$R_1(\omega) = -X_2(\omega); X_1(\omega) = R_2(\omega) \quad \text{per } \omega > 0,$$

$$R_1(\omega) = X_2(\omega); X_1(\omega) = -R_2(\omega) \quad \text{per } \omega < 0.$$

$$F_2(\omega) = -jF_1(\omega) \quad \text{per } \omega > 0, F_2(\omega) = jF_1(\omega) \quad \text{per } \omega < 0. \quad (1-33)$$

$$F(\omega) = 2F_1(\omega) = 2jF_2(\omega) \quad \text{per } \omega > 0, F(\omega) = 0 \quad \text{per } \omega < 0.$$

Queste relazioni sono graficamente rappresentate nella figura 5.

Le prime quattro relazioni (1-33) possono anche scriversi rispettivamente nella forma seguente, applicando le (1-15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cos \omega t \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \sin \omega t \cdot dt \quad \text{per } \omega > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cos \omega t \cdot dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \sin \omega t \cdot dt \quad \text{per } \omega < 0$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \sin \omega t \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \cos \omega t \cdot dt \quad \text{per } \omega > 0$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \sin \omega t \cdot dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \cos \omega t \cdot dt \quad \text{per } \omega < 0 \quad (1-34)$$

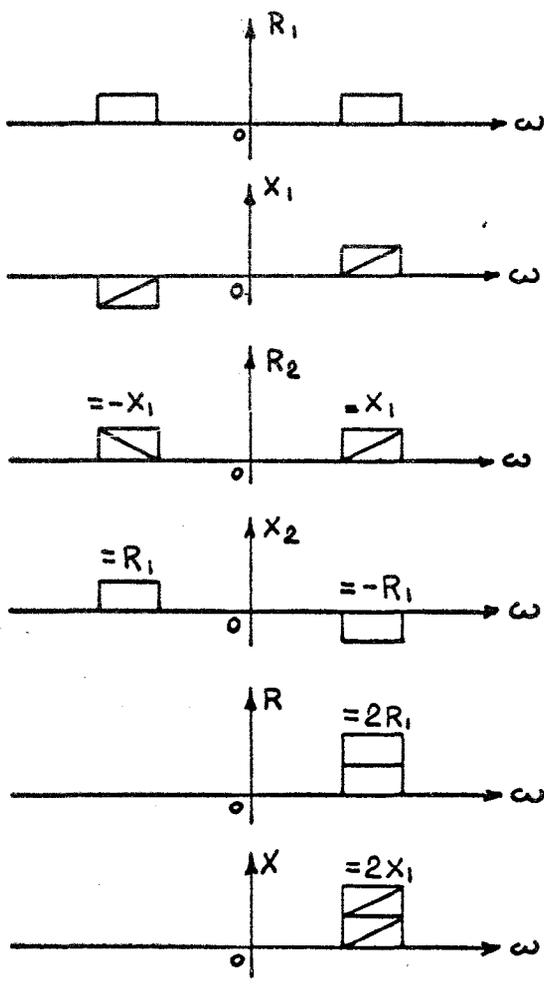
Dalle (1-33) ed (1-34) è facile dedurre che le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ sono tra loro dipendenti; più precisamente esse sono tra loro ortogonali, (Appendice 1) in quanto soddisfano alla condizione di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt = 0 \quad (1-35)$$

Tale relazione è facilmente dimostrabile facendo uso di una delle proprietà delle trasformate di Fourier che verranno riportate più avanti, e precisamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) \cdot d\omega \quad (1-36)$$

ove si sostituisca al posto di $F_1(\omega)$ ed $F_2(\omega)$ le loro espressioni



$$F_1(\omega) = R_1(\omega) + j X_1(\omega)$$

$$F_2(\omega) = R_2(\omega) + j X_2(\omega)$$

$$F(\omega) = F_1(\omega) + j F_2(\omega)$$

Fig. 5

Tab. 1- Casi particolari di relazioni tra $f(t)$ ed $F(\omega)$.

($f(t)$ ed $F(\omega)$ vengono qui indicate nella forma abbreviata:)

$$f = f_1 + j f_2 ; \quad F = R + jX$$

Se	è allora	Se poi	è allora	caso n°
$f = f_1$ <u>reale</u>	$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ pari} \\ X \text{ dispari} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \text{ pari} \\ f_1 \text{ dispari} \end{array} \right.$	$F = R ; X = 0$	1
			$F = jX ; R = 0$	2
$f = j f_2$ <u>immag.</u>	$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ dispari} \\ X \text{ pari} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f_2 \text{ pari} \\ f_2 \text{ dispari} \end{array} \right.$	$F = jX ; R = 0$	3
			$F = R ; X = 0$	4
$f = f_1$ per $t \geq 0$ $= 0$ per $t < 0$ <u>causale</u>			R ed X sono trasformate di Hilbert	5
$F = R$ <u>reale</u>	$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \text{ pari} \\ f_2 \text{ dispari} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} R \text{ pari} \\ R \text{ dispari} \end{array} \right.$	$f = f_1 ; f_2 = 0$	$6 \equiv 1$
			$f = j f_2 ; f_1 = 0$	$7 \equiv 4$
$F = jX$ <u>immag.</u>	$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \text{ dispari} \\ f_2 \text{ pari} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ pari} \\ X \text{ dispari} \end{array} \right.$	$f = j f_2 ; f_1 = 0$	$8 \equiv 3$
			$f = f_1 ; f_2 = 0$	$9 \equiv 2$
$F = R + jX$ per $\omega \geq 0$ 0 per $\omega < 0$: f è allora <u>analitica</u> ; f_1 ed f_2 sono trasformate di Hilbert.	10

secondo le (1-33). Sarebbe ora possibile dimostrare che la funzione $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$ è una funzione analitica, secondo la definizione data in Appendice 2.

Conseguenza più evidente della analiticità di $f(t)$ è che la dipendenza tra le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ è esprimibile mediante le trasformazioni di Hilbert:

$$f_2(t_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t-t_0} dt ; \quad f_1(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(t)}{t-t_0} dt ; \quad (1-37)$$

E' a questo punto possibile analizzare l'importanza delle proprietà qui vi dimostrate. Dato infatti un segnale reale $f_1(t)$, che ammette trasformata di Fourier $F_1(\omega) = R_1(\omega) + j X_1(\omega)$, è possibile sommare ad esso un segnale immaginario $jf_2(t)$, il cui spettro $jF_2(\omega) = j [R_2(\omega) + j X_2(\omega)]$ è dato dalle (1-33), ottenendo un segnale complesso risultante $f(t)$, avente spettro $F(\omega) = 2F_1(\omega)$ per $\omega > 0$ ed $F(\omega) = 0$ per $\omega < 0$. Viceversa, se si cancella la parte negativa dello spettro $F_1(\omega)$ di un segnale reale $f_1(t)$, questo si trasforma in un segnale complesso $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$, ove $f_2(t)$ è ottenibile da $f_1(t)$ mediante le (1-37).

La trasformazione di un segnale reale in un segnale analitico può essere spesso vantaggiosa, in quanto permette di far uso delle notazioni complesse.

Le stesse proprietà qui vi mostrate per le due funzioni $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ sono valide, nel caso delle funzioni causali, per le componenti $R(\omega)$ ed $X(\omega)$, espresse dalle (1-24). Nella tab. 1 sono riassunte in modo schematico le relazioni tra $f(t)$ ed $F(\omega)$, qui vi esaminate.

1.5 - Altre proprietà delle trasformate di Fourier.

Prima di riportare in Tab. 2 alcune delle più utili formule di trasformazione è necessario fare delle precisazioni su alcune delle funzioni e delle notazioni che verranno richiamate.

a) - La funzione Delta, $\delta(x)$.

Tale funzione è un mezzo per rappresentare valori discreti di una grandezza, quanto questa è rappresentata mediante la sua funzione di densità continua.

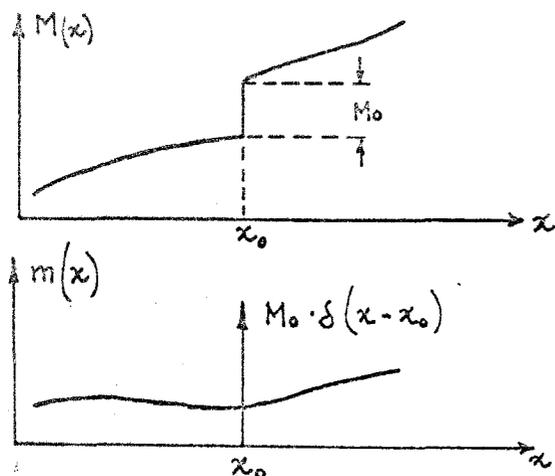


Fig. 6

Se ora si sovrappone al peso distribuito il peso concentrato M_0 nel punto $x=x_0$, sorge il problema di rappresentare tale grandezza discreta nella rappresentazione di densità $m(x)$; ad M_0 dovrà infatti spettare una area finita, pari ad M_0 , in un intervallo dx nullo. Per ovviare a questa deficienza si ricorre alla funzione $\delta(x)$, che gode delle seguenti proprietà:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ \infty & \text{per } x = 0 \end{cases} ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1-38)$$

ovvero, la $\delta(x)$ è $\neq 0$ solo nel punto $x=0$, ed ivi assume valore infinito. Inoltre essa può sottendere un'area unitaria in un intervallo nullo.

Mediante tale nuova funzione la densità di peso $m(x)$ dello esempio precedente può ora rappresentarsi come:

$$m(x) + M_0 \delta(x - x_0).$$

In maniera più rigorosa la funzione $\delta(x)$ può essere definita come:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > \varepsilon \\ 1/2\varepsilon & , |x| < \varepsilon \end{cases} \quad (1-39)$$

Vediamo ora di ottenere la trasformata di Fourier di $\delta(t)$; facendo uso della definizione (1-39), trasformando $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \omega \varepsilon}{\omega \varepsilon} \quad (1-40)$$

Facendo ora tendere ε a zero, la funzione $f(t)$ tende alla $\delta(t)$, secondo la (1-39), mentre la $F(\omega) = \frac{\sin \omega \varepsilon}{\omega \varepsilon}$ tende ad 1. Ovvero la funzione Delta ha uno spettro uniforme che si estende da $-\infty$ a $+\infty$.

Nella Fig. 7 è rappresentato l'impulso di larghezza 2ε ed il corrispondente spettro. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ i punti A ed A' tendono rispettivamente verso $+$ e $-\infty$.

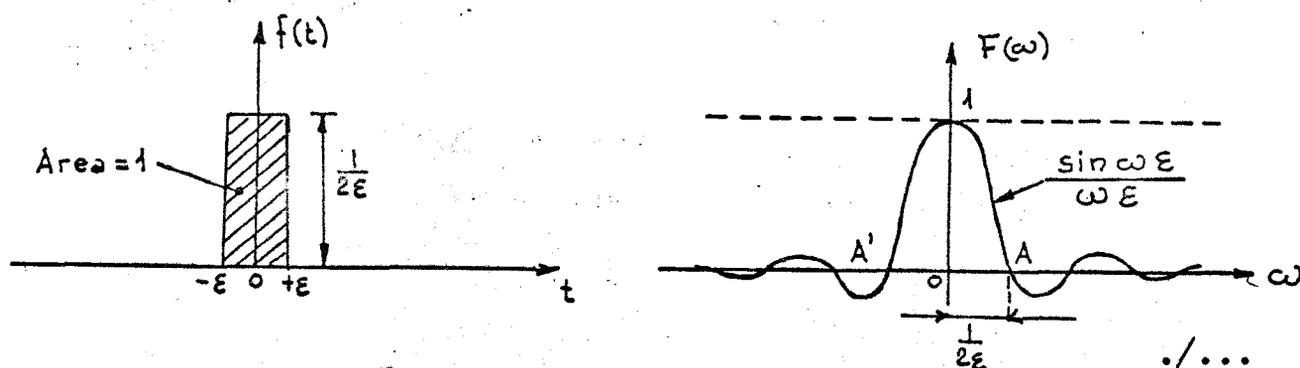


Fig. 7

La funzione $\delta(t)$ presenta delle difficoltà matematiche. Essa ad esempio non soddisfa alle condizioni di trasformabilità e non è quindi possibile riottenere la funzione $\delta(t)$ come trasformata inversa della $F(\omega) = 1$, se non con opportuni artifici. Si ha in fatti in tal caso l'integrale non convergente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

Per ovviare a tale inconveniente si considera dapprima la funzione $F(\omega) = e^{-A\omega^2}$ e si fa l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A\omega^2} e^{j\omega t} d\omega$$

Tale integrale è ora convergente, e la $\delta(t)$ può essere ottenuta come:

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A\omega^2} e^{j\omega t} d\omega \quad (1-41)$$

b) - Integrale di convoluzione.

Assegnate due funzioni $f(t)$ e $v(t)$, si definisce l'integrale di convoluzione:

$$g(t) = f \otimes v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot v(t-\tau) d\tau = v \otimes f \quad (1-42)$$

Nel caso in cui una delle due funzioni sia la funzione $\delta(t)$, si ha;

$$\delta \otimes f = f(t) \quad (1-43)$$

infatti è:

$$\delta \otimes f = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau = f(t). \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (1-44)$$

E' poi anche:

$\delta \otimes f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$; (1-44 bis); ovvero la $f(t)$ può esprimersi come l'integrale di elementi impulsivi ai tempi τ e di forza $f(\tau)$.

Vediamo ora di dare, con un esempio, un significato fisico all'integrale di convoluzione. Consideriamo un sistema causale passivo, lineare ed invariante nel tempo (queste due ultime qualità sono valide per tutti i sistemi ai quali si applica l'analisi di Fourier).

Sia $v(t)$ la risposta all'ingresso $\delta(t)$, e $A \cdot v(t - \tau)$ all'ingresso $A \cdot \delta(t - \tau)$, con A costante.

Consideriamo di avere ora all'ingresso la funzione $f(t)$, rappresentabile mediante la (1-44 bis),

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

La funzione d'uscita corrispondente si otterrà sostituendo nell'integrale ad ogni elemento impulsivo $\delta(t - \tau)$ il segnale di uscita corrispondente $v(t - \tau)$, ovvero:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) v(t - \tau) d\tau$$

Sia il sistema passivo un filtro R.C. passa basso, per il quale è $V(t - \tau) = K_0 \cdot e^{-K(t - \tau)}$ e sia

$f(\tau) = 1$, per $0 < \tau < 1$. Si otterranno allora le forme d'onda di Fig. 8.

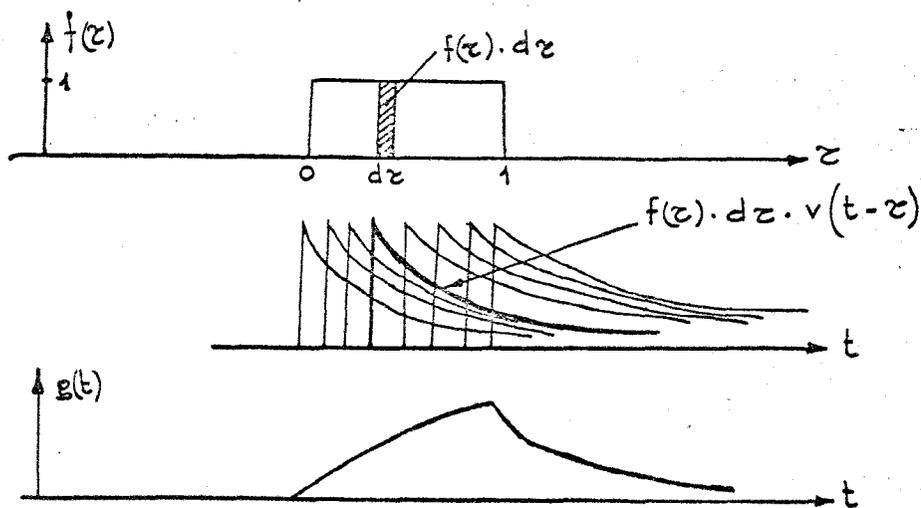


Fig. 8

c) - Rect (t/T), sinc (ω T/2 π).

Queste due funzioni rappresentano una delle più importanti coppie di trasformate. Le notazioni hanno il significato seguente:

$$\text{rect} (t/T) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad \text{impulso rettangolare}$$

$$\text{sinc} (\omega T/2\pi) = \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \quad \text{funzione "seno x su x"}$$

Queste due funzioni sono già state graficamente rappresentate in Fig. 6, ove al posto di ε si ponga $T/2$. È stato anche provato nelle (1-40) che le (1-45) sono una coppia di trasformate di Fourier.

La funzione "seno x su x" ha proprietà molto interessanti. Tra queste ricordiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, dx = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 x \, dx = 1 \quad (1-46)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x-m) \cdot \text{sinc}(x-n) \cdot dx = \begin{cases} 1 & \text{per } m=n \\ 0 & \text{per } m \neq n \end{cases} \quad (1-47)$$

ove la (1-47) mostra che funzioni "seno x su x" traslate sono mutualmente ortogonali.

$$d) - \text{Rep}_T f(t), \quad \frac{1}{T} \cdot \text{comb}_{2\pi/T} F(\omega)$$

Queste due notazioni, rispettivamente "ripetizione" e "pettine", hanno il seguente significato:

$$\text{rep}_T f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT) \quad (1-48)$$

$$\frac{1}{T} \cdot \text{comb}_{2\pi/T} F(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(n \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right); \quad 1-49$$

Le espressioni (1-48) ed (1-49) sono una coppia di trasformate di Fourier. Il loro significato è che, se una funzione non periodica $f(t)$, di trasformata $F(\omega)$, viene traslata nel tempo ad intervalli T ed una nuova funzione $\text{rep}_T f(t)$ costruita sommando tra loro tutte le funzioni così traslate, questa ha come trasformata la funzione che si ottiene campionando lo spettro $F(\omega)$ ad intervalli $2\pi/T$. (fig. 7). Cioè, se da una funzione non periodica si crea nel modo suddetto una funzione periodica, lo spettro della nuova funzione è uno spettro a linee a distanza $2\pi/T$, e di forza pari a $F\left(n \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{1}{T}$

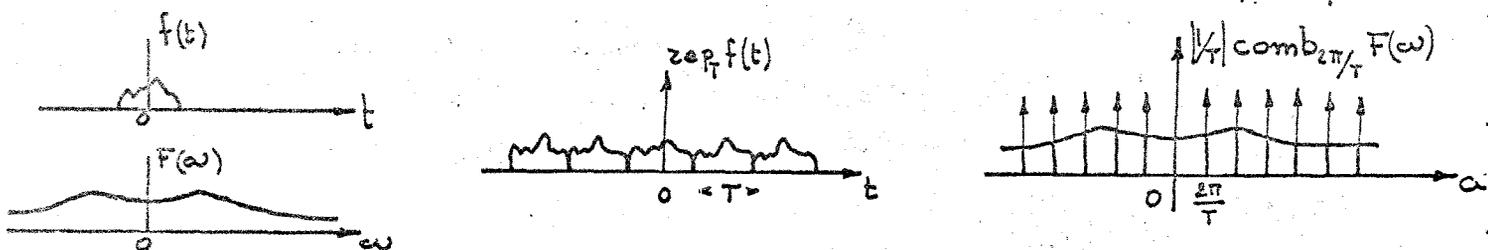


fig. 9

Tab. 2- Alcune formule di trasformazione.

<u>Forma d'onda</u>	<u>Spettro</u>	<u>Notazioni</u>
$f(t)$	$F(\omega)$	
$A.f(t)+B.v(t)$	$A.F(\omega)+B.V(\omega)$	A,B costanti
$f(-t)$	$F(-\omega)$	
$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$	complesso coniugato
$f'(t)$	$j\omega F(\omega)$	differenziazione
$-2\pi j t f(t)$	$2\pi F'(\omega)$	"
$f(t-\tau)$	$F(\omega) \exp(-j\omega\tau)$	traslazione nel tempo
$f(t) \exp(j\Omega t)$	$F(\omega - \Omega)$	" nella frequenza
$f(t/T)$	$ T F(\omega.T)$	T costante
$f(t) \otimes v(t)$	$F(\omega) \cdot V(\omega)$	convoluzione
$f(t) v(t)$	$F(\omega) \otimes V(\omega)$	"
$\text{rep}_T f(t)$	$ 1/T \text{comb}_{2\pi/T} F(\omega)$	
$\text{comb}_T f(t)$	$ 1/T \text{rep}_{2\pi/T} F(\omega)$	
$F(t)$	$f(-\omega)$	
$\delta(t)$	1	
$\text{rect}(t/T)$	$\text{sinc}(\omega T/2\pi) \cdot T$	
$\text{sinc}(\Omega t/2\pi) \cdot \Omega$	$\text{rect}(\omega/\Omega)$	
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\omega^2/4\pi)$	
$\delta(t-\tau)$	$1 \cdot \exp(-j\omega\tau)$	
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n \cdot F(\omega)$	
$(-2\pi j t)^n \cdot f(t)$	$(2\pi)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot V^*(\omega) d\omega$$

Appendice 1- Condizione di ortogonalità-

Il concetto di ortogonalità di due funzioni ha origine dall'analisi vettoriale, ove due vettori $\bar{A}(x,y,z)$, $\bar{B}(x,y,z)$ sono tra loro

ortogonali quando il loro prodotto scalare è nullo; ovvero:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad (1A-1)$$

In uno spazio ad n dimensioni si ha:

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i = 0$$

Se si passa ora ad infinite dimensioni la variabile discontinua i diviene la variabile continua x . La condizione di ortogonalità, in un intervallo $0 \dots m$ della variabile x , può scriversi:

$$\int_0^m A(x) \cdot B(x) \cdot dx = 0 \quad (1A-2)$$

ove ora $A(x)$ e $B(x)$ rappresentano due generiche funzioni della variabile x .

La condizione di ortogonalità per due funzioni, che siano definite tra $-\infty$ e $+\infty$ diviene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot v(x) \cdot dx = 0 \quad (1A-3)$$

Appendice 2 - Sulla definizione delle funzioni analitiche.

Si consideri la variabile complessa $u = t + j\theta$, i cui valori sono contenuti nella regione R . Si associ a tale variabile una funzione $z(u) = x(u) + jy(u)$, che prende valori nella corrispondente regione R' .

La funzione $z(u)$ è analitica quando le sue componenti $x(u)$ ed $y(u)$ soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \theta} ; \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{\partial y}{\partial t} \quad (2A-1)$$

Queste condizioni stabiliscono un legame tra le funzioni $x(u)$ ed $y(u)$, che non possono assumere valori indipendentemente, ma solo in modo tale che le loro variazioni soddisfino le (2A-1).

Le due funzioni $x(u)$ ed $y(u)$ possono ricavarsi l'una dall'altra mediante le formule di reciprocità di Hilbert. Queste sono derivate dall'integrale di Cauchy:

$$z(u_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z(u)}{u-u_0} du \quad (2A-2)$$

ove $z(u)$ è la funzione analitica considerata ed u_0 un punto nella regione R .

L'integrale al contorno può ora considerarsi calcolato lungo un semicerchio con centro nel punto $u=0$, ed il cui diametro D si estende sull'asse reale t e la semicirconferenza C nel semipiano $\theta > 0$.

Se ora si fa tendere il raggio del cerchio all'infinito, il contributo all'integrale lungo C tende a zero, e se $u_0 \rightarrow t_0$ si ottiene:

$$z(t_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(t)}{t-t_0} dt \quad (2A-3)$$

Considerando ora la parte reale e quella immaginaria della (2A-3) si ottengono le formule di reciprocità di Hilbert:

$$y(t_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{t-t_0} dt$$

$$x(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t)}{t-t_0} dt \quad (2A-4)$$

Si noti inoltre che le due funzioni $x(u)$ e $y(t)$ soddisfano alla condizione di ortogonalità (1A-3).-