CAP. 3 - Correlazione ed Analisi Spettrale

3-0 Introduzione

Nei due precedenti capitoli si è trattato dei due metodi di rappresentazione delle funzioni, quello dell'analisi deterministica e dell'analisi statistica. Si è pure accennato come la scelta di uno o l'altro dei due metodi sia condizionata al tipo di conoscenza che si ha della funzione in esame. Entrambi questi metodi danno una descrizione completa, il primo per una funzione arbitraria in un dato intervallo di tempo ed il secondo per un insieme di funzioni in particolari istanti di tempo.

Il metodo di analisi della Correlazione e dell'Analisi Spettrale, è basato sulla conoscenza della funzione, o dell'insieme di funzioni, in due arbitrari istanti di tempo.

Tale tipo di analisi può operarsi sia nel senso dell'analisi temporale che di quella statistica, ed in tale modo ne deriva la probabilità di distinguere aspetti temporali da aspetti statistici nel fenomeno in esame.

Correlazione ed Analisi Spettrale non offrono però una descrizione completa del fenomeno, eccetto che per funzioni gaussiane.

3-1 La funzione di autocorrelazione

Si è visto che per una funzione aleatoria $X(t)$ la funzione di autocorrelazione statistica, che per la funzione centrata coincide con la covarianza, si esprime come:

$$\Gamma(t_1,t_2) = E\left[X(t_1) \cdot X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1 \cdot X_2 \cdot p(X_1, X_2).dX_1.dX_2 \qquad (3\text{-}1)$$

ove t_1 e t_2 rappresentano due arbitrari istanti di osservazione dell'intoro processo. Se il processo è stazionario, si è visto che è: $\Gamma(t_1,t_2) = \Gamma(\tau)$, con $\tau = t_2 - t_1$.

Se si considera ora un solo membro del processo aleatorio $X(t)$, di questo è possibile definire la funzione di autocorrelazione (temporale):

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) \cdot X(t-\tau)dt = \overline{X(t) \cdot X(t-\tau)}; \qquad (3\text{-}2)$$

se $X(t)$ è re

ove la $C(\tau)$ ha le dimensioni di una potenza ed è una funzione reale. Tale definizione è valida genericamente nel caso in cui la funzione $X(t)$ sia illimitata nel tempo, aleatoria, o determinata periodica, ad energia infinita. Nel caso in cui invece la $X(t)$ abbia energia finita si dovrà scrivere:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot X(t-\tau)\cdot dt \qquad (3\text{-}3)$$

Generalmente la (3-1) e la (3-2) conducono a risultati diversi, a meno del

caso di processo ergodico.

Vediamo ora di riportare le principali proprietà di $C(\tau)$, il cui andamento è rappresentato nella figura 25, nel caso generico in cui X(t) abbia carattere di rumore aleatorio.

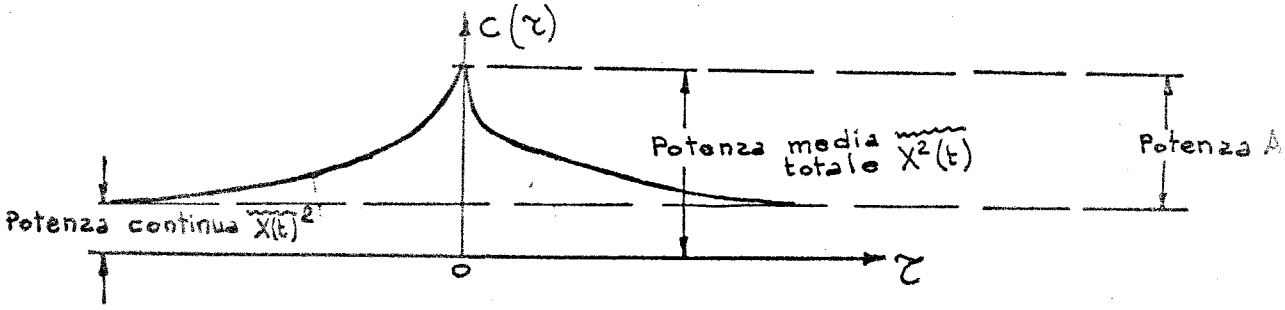


Fig. 25

Per $\tau = 0$ la $C(0) = \overline{X^2(t)}$, ovvero è uguale alla potenza totale del segnale X(t). Per $\tau \to \infty$, l'integrale (3-2) diviene uguale al quadrato del valore medio, $\overline{X(t)}^2$, che rappresenta la potenza in continua. E' inoltre:

$$C(\tau) = C(-\tau), \tag{3-4}$$

ovvero $C(\tau)$ è una funzione pari. Ed inoltre:

$$|C(\tau)| \leq C(0) \tag{3-5}$$

L'andamento di $C(\tau)$ è generalmente decrescente al crescere di τ, e dà una misura della "costante di tempo" del processo. E' intuibile a questo punto, e verrà precisato in seguito, come ad un processo che contenga componenti che variano lentamente nel tempo debba corrispondere una funzione $C(\tau)$ a decrescita meno rapida al crescere di τ. Ovvero, bisognerà allontanare notevolmente gli istanti di osservazione per trovare che i termini X(t) ed $X(t-\tau)$ sono incorrelati.

Viceversa, se il segnale contiene anche componenti ad alta frequenza, cioè è caratterizzato da variazioni più brusche, ci si può aspettare di ottenere per la $C(\tau)$ una rapida decrescita al crescere di τ.

Nel caso in cui X(t) è periodica e sviluppabile in serie di Fourier, si ha:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{3-6}$$

Da questa si ottiene, sostituendo nella (3-2):

$$C(\tau) = D_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 \cdot \cos n\omega_0 \tau \tag{3-7}$$

La (3-7) è quindi una somma di termini in cos n $\omega_0 \tau$, che saranno ovviamente tutti in fase per $\tau = 0$, moltiplicati ciascuno per il quadrato del modulo del coefficiente complesso rispettivo. Cioè, la funzione di autocorrelazione di una funzione periodica è determinata dalla conoscenza della sola ampiezza dei coeefficienti complessi della serie di Fourier, e non dalla loro fase. Vi saranno quindi infinite funzioni X(t), il cui sviluppo presenta coefficienti di uguale ampiezza, ma diversa fase. Tutte queste funzioni avranno stessa funzione di autocorrelazione $C(\tau)$.

Nel caso più generico di <u>funzione X(t) complessa,</u> la $C(\tau)$ viene definita come la media temporale, o statistica, a seconda delle due definizioni, della X(t) moltiplicata per il suo complesso coniugato $X^*(t-\tau)$. Ovvero

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) \cdot X^*(t-\tau) \cdot dt \qquad (3\text{-}8)$$

$$C(\tau) = E\left[X(t) \cdot X^*(t-\tau)\right] \qquad (3\text{-}9)$$

La notazione complessa viene qui introdotta così come nel caso della definizione della potenza di un segnale complesso. La $C(\tau)$ rappresenta in tal modo per $\tau = 0$ la potenza totale del segnale complesso, ed è <u>reale per $\tau = 0$.</u> Generalmente per $\tau \neq 0$ la $C(\tau)$ è ancora una funzione complessa. Ritorneremo su questo punto a proposito della correlazione incrociata.

3-2 Lo Spettro di Potenza

Dato un generico segnale reale X(t), di potenza media W, si è interessati alla distribuzione della potenza sulla banda di frequenza occupata dal segnale. Per questo si introduce una densità di potenza W(f), tale che la potenza assegnata all'intervallo f, f + df, è uguale a W(f).df. Si ha quindi:

$$W = \int_0^{+\infty} W(f).df \qquad (3\text{-}10)$$

W (f) è detto anche <u>spettro di potenza</u> di X(t), ed ha le dimensioni di una energia.

Se la X(t) è <u>periodica</u>, di periodo T e sviluppabile in serie di Fourier, si ha uno spettro di potenza a linee, esprimibile nella rappresentazione di densità mediante funzioni δ . Mediante il teorema di Parseval si ha infatti:

$$W = \int_0^{\infty} W(f)df = \sum_{-\infty}^{+\infty} |D_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |X(t)|^2 . dt \qquad (3\text{-}11)$$

ove la densità di potenza è esprimibile come :

$$W(f) = \sum^{+\infty} |D_n|^2 \cdot \delta\left(f - n \cdot \frac{1}{T}\right) \qquad (3\text{-}12)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico X(t) conduce quindi direttamente, mediante la (3-11) alla distribuzione della potenza media.

Una interessante osservazione va fatta a proposito della indipendenza, ai fini della potenza media, tra intervalli di frequenza separati. Ciò deriva dalle condizioni di ortogonalità delle funzioni in seno e coseno.

Nel caso di segnale X(t) non periodico ad energia finita, che ammette trasformate di Fourier F(f), non sarebbe necessaria la introduzione della densità di potenza W(f); si potrebbe infatti ricorrere direttamente alla densità di energia $|F(f)|^2$, onde conoscere la distribuzione della energia nelle varie bande di frequenza. Si ha in tal caso per la energia totale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 \, df \qquad (3\text{-}13)$$

Nel caso di un segnale non periodico X(t) ed illimitato nel tempo, come la maggior parte dei segnali in comunicazioni elettriche, la sua energia non è finita; pertanto X(t) non è trasformabile secondo Fourier e la densità spettrale di energia non può essere definita, Si può invece in tal caso ricorrere alla densità di potenza W (f), se si ammette che la potenza media sia finita ; la W (f) può ora essere definita tramite una funzione ausiliaria:

$$\begin{aligned} X_T(t) &= X(t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq T \\ &= 0 \quad \text{altrove} \end{aligned} \qquad (3\text{-}14)$$

Tale funzione è ad energia finita ed ammette perciò trasformata di Fourier:

$$F_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) \, e^{-j\omega t} \, dt = \int_0^T X(t) \, e^{-j\omega t} \, dt \qquad (3\text{-}15)$$

La energia di $X_T(t)$ è data da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(f)|^2 \, df = \text{Energia di } X_T(t) \qquad (3\text{-}16)$$

La potenza del segnale X(t) può ora essere definita come:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(f)|^2 \, df \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to \infty} \left[\frac{|F_T(f)|^2}{T} \right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} W'(f) \, df \qquad (3\text{-}17)$$

ove $W'(f) = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{|F_T(f)|^2}{T} \right]$ (3-18)

è la densità di potenza; essa si estende per frequenze positive e negative ed è simmetrica rispetto ad f = 0; più precisamente W'(f) è una funzione reale e pari.

Similmente la $W(f)$, definita solo per $f \geq 0$, può esprimersi come:

$$W(f) = \lim_{T \to \infty} 2 \frac{|F_T(f)|^2}{T} \qquad (3\text{-}19)$$

Le due definizioni (3-18) e (3-19) sono equivalenti, e precisamente:

$$\begin{aligned} W(f) &= 2\, WW'(f) && \text{per } f \geq 0 \\ &= 0 && \text{per } f < 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}20)$$

Appare dalla (3-19) che è necessario conoscere il comportamento passato e futuro del segnale $X(t)$ onde poter definire $W(f)$. Pertanto tale grandezza potrebbe apparire priva di pratica utilità a meno che non si sia in grado di fare delle previsioni statistiche sul comportamento futuro del segnale tramite il suo comportamento medio. Consideriamo infatti una funzione aleatoria $X(t)$. Per ogni membro del processo aleatorio possiamo definire uno spettro di potenza $W(f)$, secondo la (3-19). Generalmente tali funzioni differiscono statisticamente da membro a membro, e sarà quindi possibile operare la media statistica di $W(f)$, ovvero $E[W(f)] = \overline{W(f)}$, che potrà definirisi come lo spettro di potenza medio.

Nel caso di processo aleatorio stazionario non è quindi necessario estendere a tuttp il passato ed a tutto il futuro il dominio di calcolo di $W(f)$, ma è sufficiente con buona approssimazione limitarlo ad un intervallo conveniente. Questo dovrà essere sufficientemente lungo per poter operare una analisi di tutte le possibili variazioni del segnale. E' quindi nelle sole ipotesi di stazionarietà che assume valore pratico la definizione (3-19) nel caso la si applichi ad un processo aleatorio. Si noti ancora che nel caso di segnale di durata limitata T, ad energia finita, la definizione di $W(f)$ secondo la (3-19) dovrà essere sostituita con:

$$W(f) = \frac{2|F(f)|^2}{T}$$

3-3 Il Teorema di Wiener-Khintchine

La funzione di autocorrelazione $C(\tau)$ e lo spettro di potenza $W(f)$ sono strettamente legati tra loro. Precisamente, se una funzione reale ammette trasformata di Fourier, allora la sua funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza sono trasformate di Fourier secondo il coseno. E' questo il teorema di Wiener-Khintchine, e si dimostra nel modo seguente.

Consideriamo il segnale $X_T(t)$ secondo la (3-14). Si ha:

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) \cdot X_T(t-\tau) \cdot dt \qquad (3\text{-}21)$$

Applichiamo ora alla (3-21) le due proprietà seguenti delle trasformate di Fourier:

$$\int f(t) \cdot v^*(t)\, dt = \int F(f).V^*(f).df; \quad X(t-\tau) \rightleftharpoons F(f).e^{-j\omega\tau}$$

Si ottiene allora:

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(f).F_T^*(f). e^{j\omega\tau} . df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(f)|^2}{T} e^{j\omega\tau} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w'(f) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df \qquad (3\text{-}22)$$

Ovvero $C(\tau)$ è ottenibile dalla trasformata di Fourier inversa di $w'(f)$; inversamente:

$$w'(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)\, e^{-j\omega\tau} . d\tau \qquad (3\text{-}23)$$

Essendo poi $X(t)$ una funzione reale, sia $C(\tau)$ che $w'(f)$ sono delle funzioni <u>reali</u> e <u>pari</u>; allora la (3-22) e (3-23) presentano la forma semplificata:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w'(f) \cos\omega\tau . df = 2 \int_{0}^{+\infty} w'(f) \cos\omega\tau\, df \qquad (3\text{-}24)$$

$$w'(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) . \cos\omega\tau . d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} C(\tau) . \cos\omega\tau . d\tau \qquad (3\text{-}25)$$

Se al posto di $w'(f)$ si considera la funzione $w(f)$, legata a $w'(f)$ con la (3-20), si ha:

$$C(\tau) = \int_{0}^{\infty} w(f) . \cos\omega\tau . df \qquad (3\text{-}26)$$

$$w(f) = 4 \int_{0}^{\infty} C(\tau) \cos\omega\tau . d\tau \qquad (3\text{-}27)$$

Lo spettro di potenza w'(f), o w(f), è derivabile secondo la (3-18) dallo spettro di Fourier del segnale, ma contiene in meno rispetto a questo l'informazione di fase. Pertanto, mentre lo spettro di Fourier rappresenta una descrizione completa del segnale, lo spettro di potenza ne è una rappresentazione incompleta. Vi sono cioè molti segnali che presentano lo stesso spettro di potenza. Lo stesso vale per la funzione di autocorrelazione $C(\tau)$, trasformata di w'(f). Fa eccezione il caso delle funzioni aleatorie gaussiane ergodiche. Si è visto infatti che in tal caso la $C(\tau)$, oppure anche la w'(f), è sufficiente per descrivere completamente le proprietà statistiche del processo.

Nella Fig.26 sono riportati due esempi elementari, quello di un'onda sinusoidale e di un'onda quadra. Gli spettri di potenza sono, come dalla (3-12), costituiti da funzioni δ. Le funzioni di autocorrelazione sono rispettivamente ancora un'onda cosinusoidale e un'onda triangolare.

Si consideri ora, ancora a titolo di esempio, il caso in cui un amplificatore, con costante di tempo RC, riceve all'ingresso del "rumore bianco". E' necessario precisare dapprima cosa si intende per "rumore bianco". Si consideri un segnale caotico costituito da una successione di impulsi molto brevi, di ampiezza pure aleatoria, positivi e negativi.

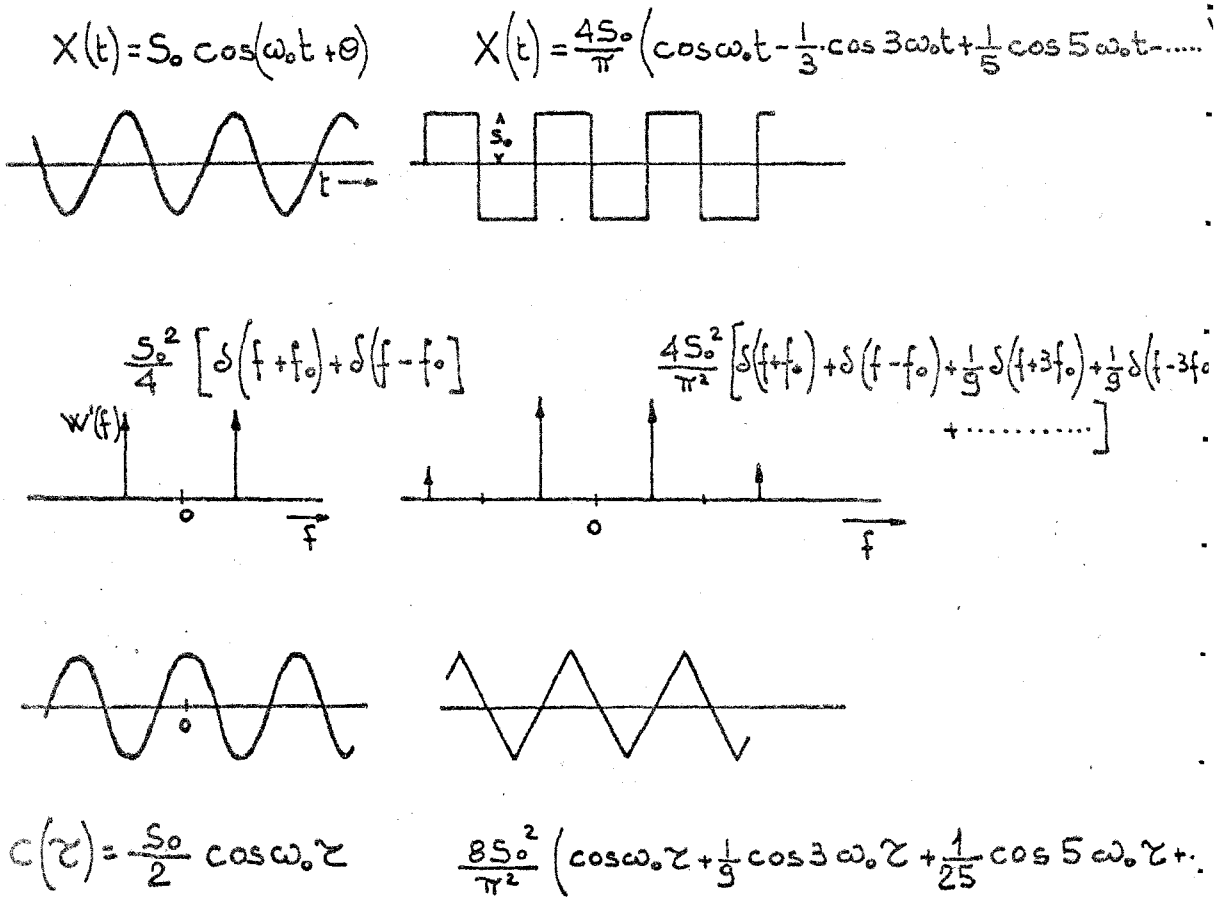


Fig. 26

Al limite, quando la durata degli impulsi tende a zero, la densità di potenza $W'(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(f)|^2}{T}$ tende ad una costante, nel senso che la potenza assegnata ad un piccolo intervallo Δf, $2.\Delta f.w'(f)$, è indipendente dalla posizione di detto intervallo. In corrispondenza di ciò la funzione di autocorrelazione tende ad una funzione $\delta(\tau)$. Fig.27 a. Si noti a questo punto come il "rumore bianco" così definito non sia fisicamente realizzabile poichè la sua potenza dovrebbe essere infinita. In pratica si può pensare ad una banda di frequenza molto grande, ma finita. Analogamente alla luce bianca che contiene tutte le componenti di frequenza (in una banda finita però), così il rumore bianco contiene anch'esso tutte le componenti di frequenza in una banda grande rispetto a quella passante del sistema di osservazione. Se chiamiamo con No la potenza

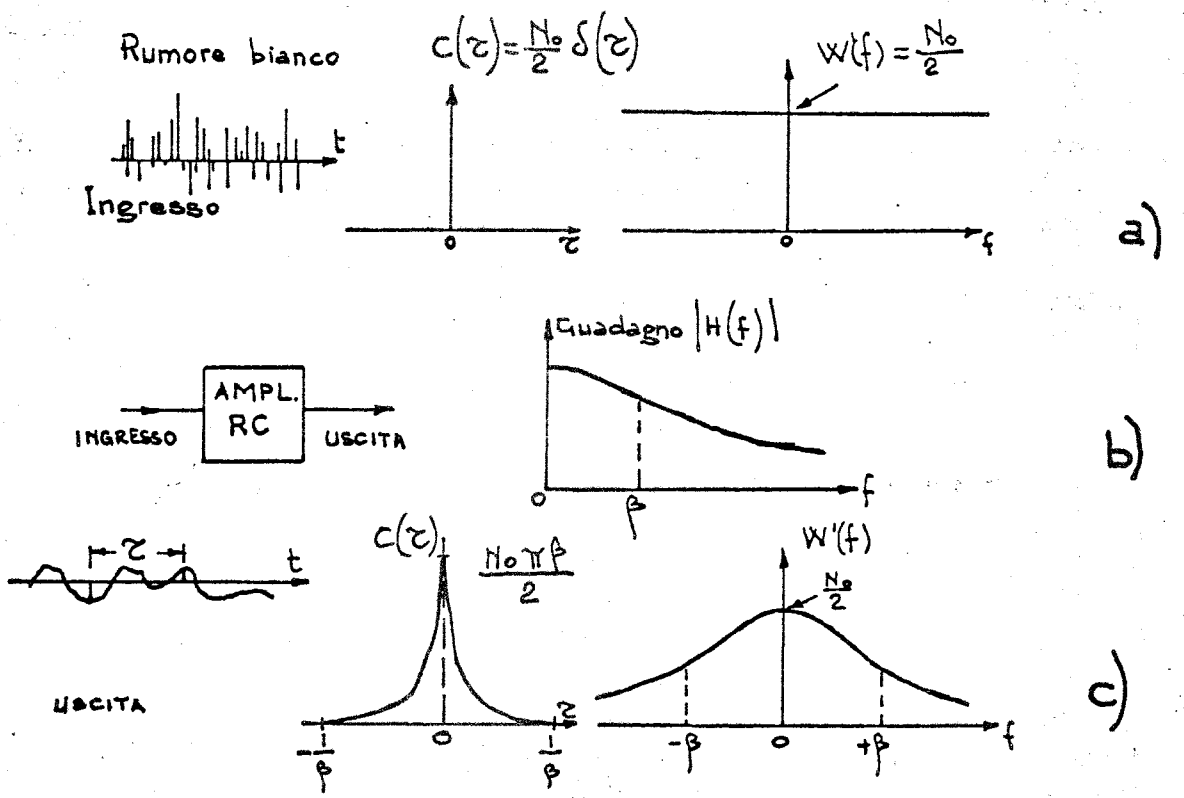


Fig.27

per unità di banda, si ha $w'(f) = \frac{w(f)}{2} = \frac{No}{2}$. Quindi è $C(\tau) = \frac{No}{2}\cdot\delta(\tau)$

Questa definizione del rumore bianco è piuttosto semplicistica. e meriterebbe in effetti una ben più ampia trattazione matematica.
Si supponga ora di inviare il rumore all'ingresso di un amplificatore con costante di tempo RC, la cui risposta in frequenza è della forma

$H(f) = \dfrac{1}{\left(1 + (f/\beta)^2\right)^{1/2}}$, ove β è la frequenza a metà potenza, (-3dB). (Fig.27

La densità di potenza all'uscita dell'amplificatore è data da:

$$w'_u(f) = w'_{in}(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{No}{2} \cdot \frac{1}{1-(f/\beta)^2} \qquad (3\text{-}28)$$

e la funzione di autocorrelazione diviene:

$$C(\tau) = 2 \int_0^\infty w'_u(f) \cdot \cos 2\pi f \tau \cdot df = \frac{\pi No \beta}{2} e^{-2\pi\beta \cdot |\tau|} \qquad (3\text{-}29)$$

La (3-28) e (3-29) sono rappresentate in Fig. 27, c).

3-4 Altri Esempi di Funzioni $C(\tau)$ e $w(f)$

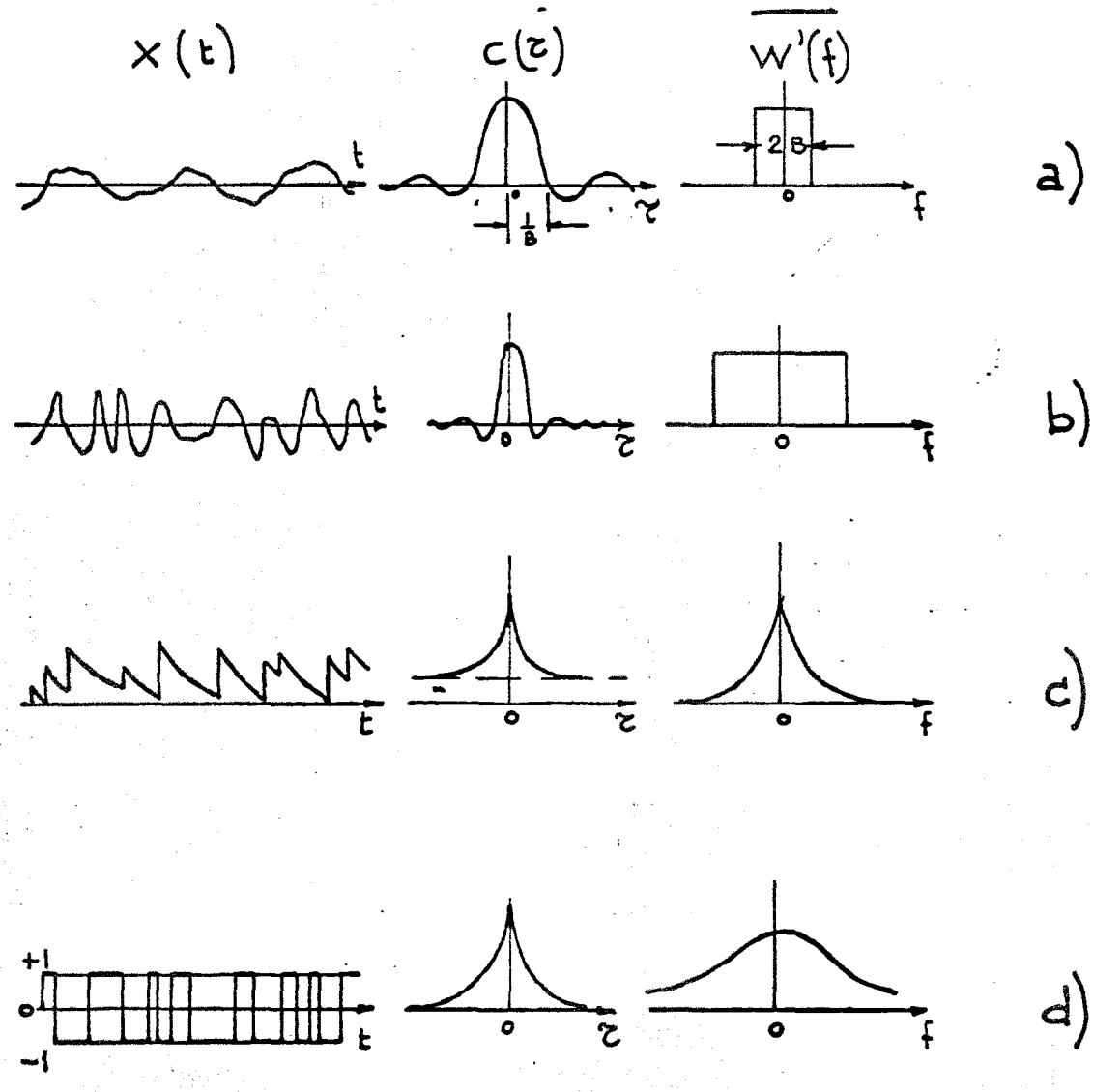
Nella Fig.28 sono rappresentate, sempre a titolo di esempio, quattro diversi tipi di fluttuazioni di rumore assieme alle rispettive densità di potenza medie $w'(f)$ ed alle funzioni di autocorrelazione $C(\tau)$. I primi due casi, a) e b), rappresentano rumore bianco limitato nella banda B. La funzione di autocorrelazione ha in tal caso un andamento del tipo $\frac{\sin x}{x}$, e precisamente:

$$C(\tau) = 2 \cdot \int_0^B w'(f) \cdot \cos 2\pi f \tau \cdot df = No.B \cdot \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau} \qquad (3\text{-}30)$$

ove No è la potenza per unità di banda.

Il caso c) rappresenta del rumore impulsivo filtrato attraverso un circuito RC. Gli impulsi, a differenza del rumore bianco, sono tutti positivi e di ampiezza aleatoria. La costante di tempo RC è dell'ordine di grandezza dell'intervallo medio tra gli impulsi, $\theta = RC \approx 1/\rho$. Lo spettro di potenza presenta una esaltazione delle componenti attorno alla frequenza zero dovuta alla componente continua del rumore, ed una attenuazione alla alta frequenze dovuta alla RC. La $C(\tau)$ presenta, come per il rumore bianco filtrato, una forma appuntita dovuta ancora alle brusche variazioni presenti nel segnale.

Il caso d) infine è rappresentato da un segnale "telegrafico caotico" normalizzato alla ampiezza +1 e -1. Se indichiamo ancora con ρ la frequenza media di passaggi per lo zero,



DA BIBLIOGRAFIA N° 4

Fig.28

si può dimostrare che la $C(\tau)$ e $w'(f)$ assumono rispettivamente la stessa forma calcolata per il rumore bianco filtrato, e cioè:

$$C(\tau) = e^{-\rho|\tau|} \quad ; \quad w'(f) = \frac{2\rho}{\rho^2 + \omega^2} \qquad (3\text{-}30)$$

Infine calcoliamo lo spettro di potenza e la funzione di autocorrelazione per un'onda telegrafica che può assumere i valori +1 e −1, ed i cui passaggi per lo zero possono avvenire soltanto ad istanti stabiliti $(2k+1)\cdot\frac{T}{2}$, con

$k = \pm 0, 1, 2 \ldots\ldots$ (Fig. 29)

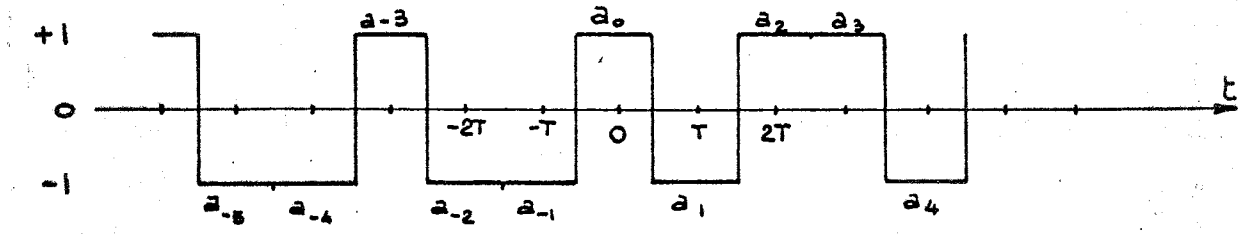


Fig.29

Tale segnale può considerarsi come la successione di impulsi di durata T, che si ripetono ogni T secondi, e la cui ampiezza assume i valori +1 e −1, indipendentemente dai valori precedenti, e con ugual probabilità per i due valori. Se indichiamo con a_0, a_1, a_2 etc. tali ampiezze, e con $f(t) = \text{rect } t/T$ l'impulso elementare, il segnale di Fig.29 può scriversi nella forma seguente:

$$X(t) = a_0 \cdot f(t) + a_1 \cdot f(t-T) + a_2 \cdot f(t-2T) + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ a_{-1} f(t+T) + a_{-2} \cdot f(t+2T) + \ldots \qquad (3\text{-}31)$$

La trasformata di Fourier dell'impulso elementare $f(t) = \text{rect } t/T$ è data da:

$$F(f) = T \cdot \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \qquad (3\text{-}32)$$

Consideriamo ora il segnale ausiliario $X_N(t)$, ottenuto arrestando la espressione (3-31) ad i termini N e −N. Tale segnale ha energia finita ed è trasformabile secondo Fourier; precisamente:

$$F_N(f) = a_0 F(f) + a_1 F(f) \cdot e^{-j\omega T} + a_2 \cdot F(f) \cdot e^{-j2\omega T} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{-1} \cdot F(f) \cdot e^{j\omega T} + a_{-2} \cdot F(f) \cdot e^{j2\omega T} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= F(f) \cdot \sum_{-N}^{N} a_n \cdot e^{-j\omega nT} \qquad (3\text{-}33)$$

Lo spettro di potenza di X(t) può ora essere definito come,

$$w'(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)\,T} \left|F_T(f)\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)\,T} \cdot |F(f)|^2 \cdot \overline{\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n \cdot e^{-jn\omega T}\right|^2} \qquad (3\text{-}34)$$

ove $(2N+1)T$ rappresenta la durata del segnale $X_N(t)$.
Per calcolare $w'(f)$ con la (3-34) bisogna quindi calcolare il valore quadratico medio del termine $\left|\sum a_n\, e^{-jn\omega T}\right|$.
Questo rappresenta il modulo di una variabile aleatoria complessa $Z_R + j\, Z_I$, ove le parti reali ed immaginarie sono a loro volta costituite dalla somma di $2N+1$ variabili aleatorie indipendenti e centrate, rispettivamente $a_n \cos n\omega t$ ed $a_n \sin n\omega t$.

Il valore quadratico medio di una di queste variabili, ad esempio $a_n \cos n\omega t$, è data da $\sigma_n^2 = E\left[a_n^2 \cdot \cos^2(n\omega t)\right] = \cos^2 n\omega t$.
Similmente per l'altra si ha $\sigma'^2_n = \sin^2 n\omega t$.

La varianza totale è data dalla somma delle varianze, grazie all'indipendenza tra le variabili; ovvero:

$$\sigma_R^2 = \sum_n \sigma_n^2 \quad ; \quad \sigma_I^2 = \sum_n \sigma'^2_n \quad ;$$

si ha quindi:

$$E\left[Z_R^2 + Z_I^2\right] = \sigma_{Tot}^2 = \sigma_R^2 + \sigma_I^2 = \sum_n \left(\cos^2 n\omega t + \sin^2 n\omega t\right) = 2N+1 \qquad (3\text{-}35)$$

Tornando alla (3-34) si ottiene al tendere di N ad ∞ :

$$w'(f) = T \cdot \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2} \qquad (3\text{-}36)$$

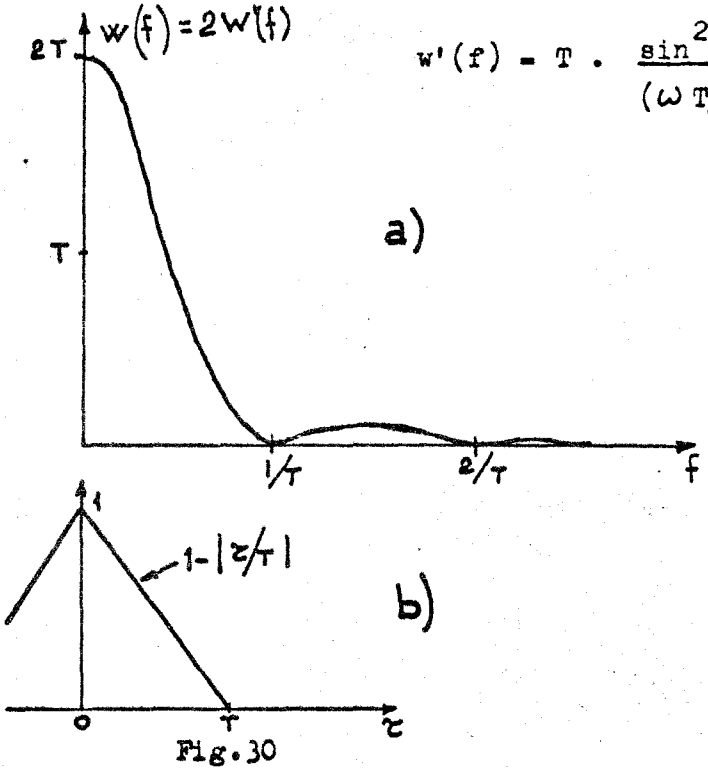
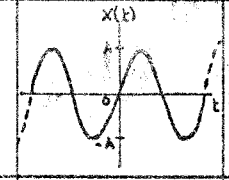
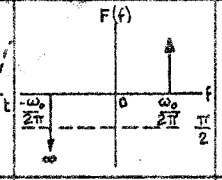
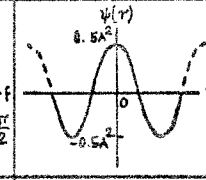
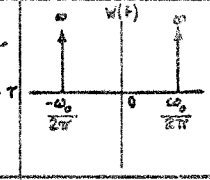
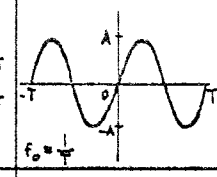
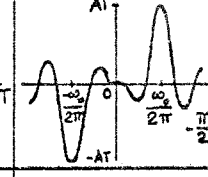
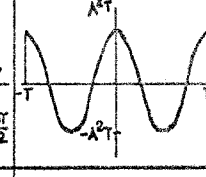
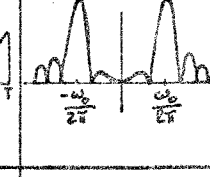
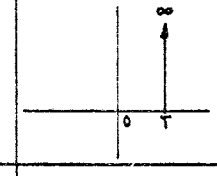
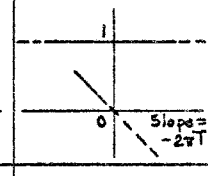
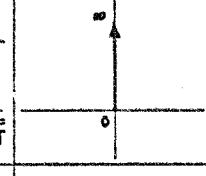
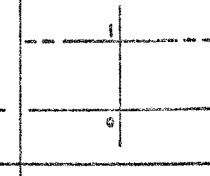
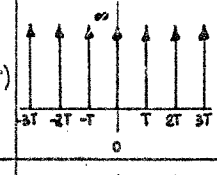
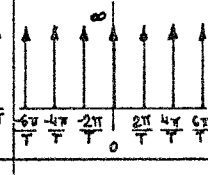
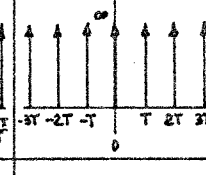
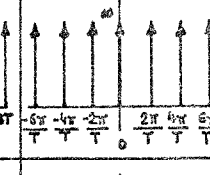
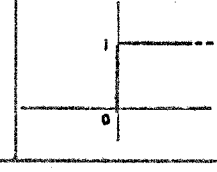
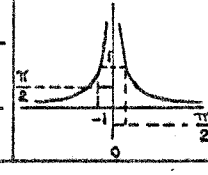
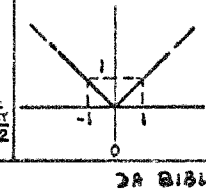
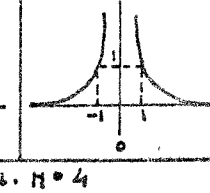


Fig.30

La (3-36) è rappresentata in Fig.30-a)
La funzione di autocorrelazione $C(\tau)$, ottenuta trasformando secondo Fourier la (3-36), è data da:

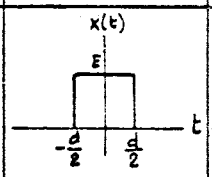
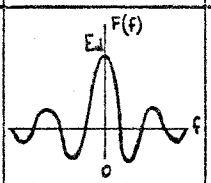
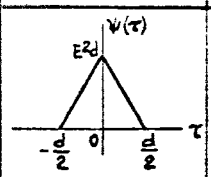
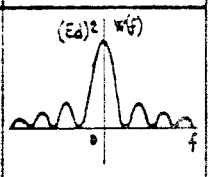
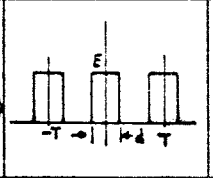
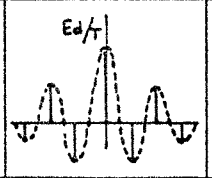
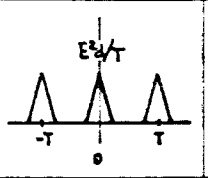
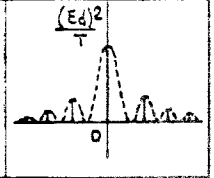
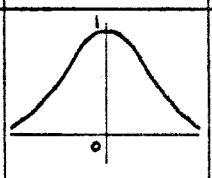
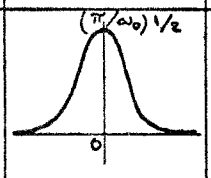
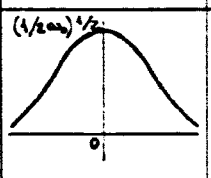
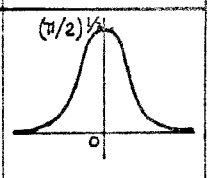
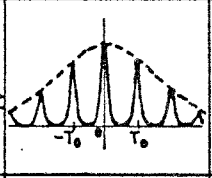
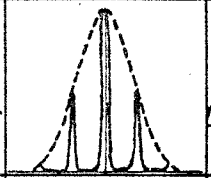
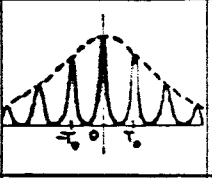
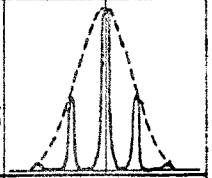
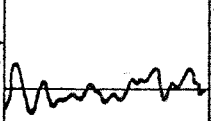
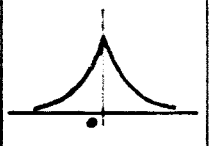
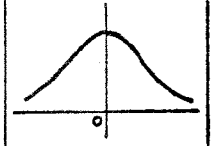
$$C(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T} \qquad (3\text{-}37)$$

ed è rappresentata in Fig. 30-b).

Tipo di funzione		ANALISI DETERMINISTICA		CORRELAZIONE ED ANALISI SPETTRALE	
		FORZA D'ONDA	SPETTRO di FOURIER AMPIEZZA - FASE	FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE	SPETTRO DI POTENZA
SINUSOIDE	$x(t) = A\sin\omega_0 t$				
SINUSOIDE TRONCATA	$x(t)=\begin{cases} A\sin\omega_0 t & \lvert t\rvert<T \\ 0, & \lvert t\rvert>T \end{cases}$				
IMPULSO δ	$x(t)=\delta(t-T)$				
TRENO DI IMPULSI	$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$				
FUNZIONE A GRADINO	$x(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$				

DA BIBL. N° 4

Fig. 31

Tipo di funzione		ANALISI DETERMINISTICA		CORRELAZIONE ED ANALISI SPETTRALE	
		FORMA D'ONDA	SPETTRO DI FOURIER AMPIEZZA - FASE	FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE	SPETTRO DI POTENZA
IMPULSO RETTANGOLARE	$x(t)=\begin{cases}E, & \lvert t\rvert < d/2\\ 0, & \lvert t\rvert > d/2\end{cases}$				
TRENO DI IMPULSI RETTANGOLARI	If $T=2d$: $x(t)=E\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\theta - \frac{2}{3\pi}\cos 3\theta + \cdots\right)$ $\theta=\frac{2\pi}{T}t$				
IMPULSO GAUSSIANO LARGO	$x(t)=e^{-\omega_0 t^2}$				
TRENO DI IMPULSI GAUSSIANI	TRENO DI IMPULSI DI AMPIEZZA VARIABILE SECONDO UN INVILUPPO GAUSSIANO PIU' LARGO.				
SEGNALE GAUSSIANO STRAORDINARIO	IL VALORE MEDIO E' INDIPENDENTE DAL TEMPO E LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DIPENDE SOLO DA τ		TUTTE LE AMPIEZZE E LE FASI SEGUONO UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA		

DA BIBL. N° 4

Fig. 32

Per terminare infine questa serie di esempi, riportiamo nelle Figg. 31 e 32 un certo numero di segnali assieme alle loro descrizioni col metodo deterministico, quando possibile, e col metodo della correlazione e dell'analisi spettrale.

3-5 Misura di $C(\tau)$ e di $w(f)$

Si consideri la funzione $C(\tau)$ secondo la seguente definizione generale:

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\Theta}^{T} X(t) \cdot X(t-\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} y(t)\,dt \qquad (3\text{-}38)$$

ove $y(t) = X(t) \cdot X(t-\tau)$.

Il problema per il calcolo di $C(\tau)$ si riduce quindi a quello di operare una media su di un tempo infinito. Tale operazione è praticamente impossibile, ma si può pensare di operare una media su di un tempo T abbastanza grande, tale che il valore di $C(\tau)$ misurato non cambi apprezzabilmente al crescere di T.

Rimane poi il problema di realizzare un integratore capace di operare la media di y(t) sui T secondi passati.

Per questo si può pensare di inviare y(t) attraverso ad un filtro la cui risposta impulsiva h(t) sia un'onda rettangolare (Fig. 33-a).

Si otterrebbe in tal modo una funzione di uscita Z(t) data

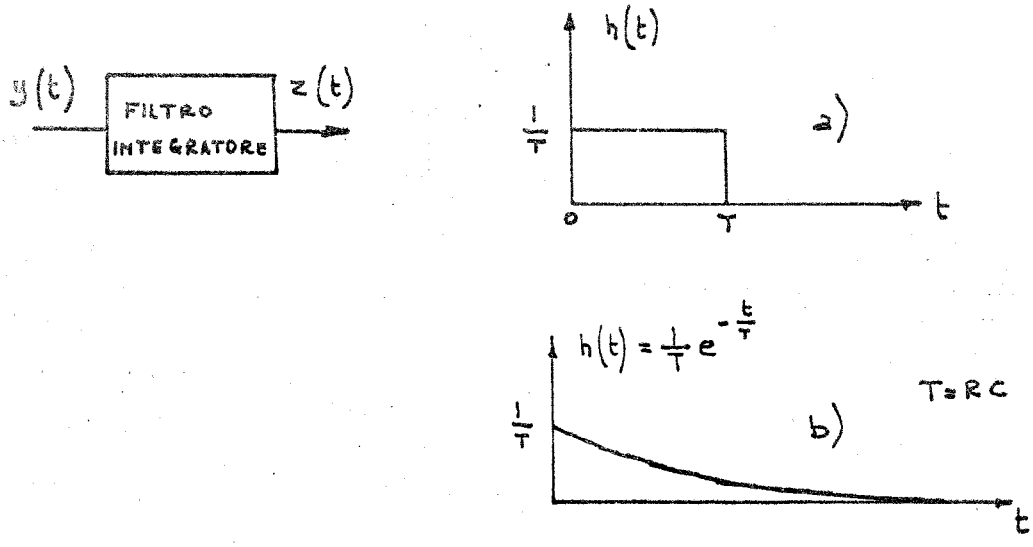


Fig.33

dall'intergale di convoluzione tra l'ingresso y(t) e la risposta impulsiva (Cap. 1, parag. 5,b) ovvero:

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) \cdot h(t-\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} y(\theta) \cdot d\theta \qquad (3\text{-}39)$$

Tale funzione h(t) è però difficile a realizzarsi per via analogica. Soluzioni di tipo digitale sono invece possibili per segnali y(t) quantizzati in tempo ed in ampiezza. Sarà in entrambi i casi necessaria una memoria capace di memorizzare il segnale y(t) per la durata T.

Più comunemente invece che all'integratore ideale su menzionato si ricorre ad un integratore RC, la cui $h(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$ è rappresentata in Fig. 33-b. Tale integratore ha la proprietà di esaltare maggiormente il passato più recente rispetto a quello meno recente. Si ha in tal caso:

$$Z(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t} y(\theta) \cdot e^{-(t-\theta)/T} \cdot dt \qquad (3\text{-}40)$$

Se ora T è scelto abbastanza grande tale integratore dà risultati in molti casi sufficientemente precisi.

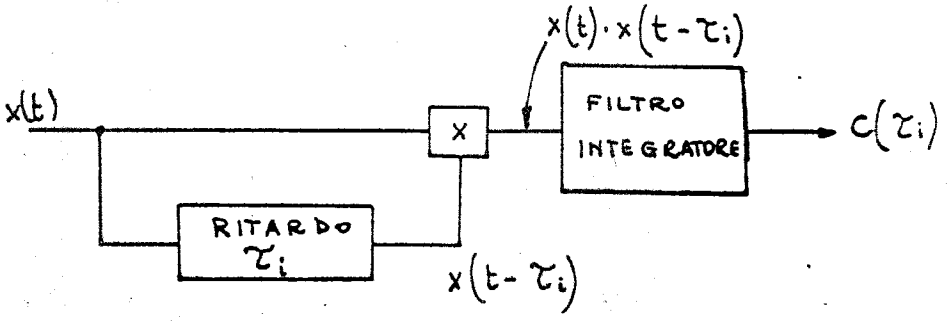


Fig.34

In Fig.34 è schematicamente rappresentato un sistema per misurare la funzione $C(\tau)$, per $\tau = \tau_i$ fissato nel sistema di ritardo. Per ottenere la $C(\tau)$ completa per un dato campo di valori di τ è necessario, o memorizzare la X(t) per una durata $> T$ e ripetere la misura con lo stesso ingresso e per diversi valori di τ, oppure avere un sistema di molti correlatori in parallelo, equivalenti ad un sufficiente numero di campioni della $C(\tau)$.

Vediamo ora come si può ottenere la misura di W(f) per un dato segnale X(t).

Si consideri di disporre di un filtro ideale rettangolare di banda $B = f_2 - f_1$ molto stretta, tale che in tale intervallo sia lecito considerare W(f) come costante; sia inoltre la risposta in frequenza del filtro uguale ad 1 nella banda B e zero al difuori. Se si invia il segnale X(t) all'ingresso di detto filtro per un tempo T, l'energia all'uscita sarà data da:

$$\int_{f_1}^{f_2} 2 \cdot |F(f)|^2 \cdot df = \int_0^T |y(t)|^2 \, dt = \mathcal{E}_{B,T} \qquad (3\text{-}41)$$

ove F(f) è la trasformata di Fourier di X(t) ed y(t) il segnale all'uscita del filtro.

La grandezza $\mathcal{E}_{B,T}$ è ora misurabile mettendo all'uscita del filtro un circuito quadratore seguito da un integratore.

La relazione tra la $\mathcal{E}_{B,T}$ e lo spettro di potenza all'uscita $W_u(f)$ è poi data dalla definizione di W(f), ovvero:

$$\int_{f_1}^{f_2} W_u(f)\, df = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{f_1}^{f_2} |F(f)|^2 \, df = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \frac{\mathcal{E}_{B,T}}{2} \qquad (3\text{-}42)$$

Se si considera poi $W_u(f)$ costante nella banda $B = f_2 - f_1$ ed uguale a $W_{IN}(f)$ all'ingresso (attenuazione del filtro = 1 nella banda B), si ottiene, per T sufficientemente grande:

$$W(f) = W_{IN}(f) = W_u(f) \cong \frac{\mathcal{E}_{B,T}}{2BT} \qquad (3\text{-}43)$$

Più grande è T e più è piccolo B più precisa è la misura.

Ovviamente valgono ancora qui le considerazioni precendenti sul sistema integratore necessario per poter operare l'integrale (3-41).

L'ipotesi che il filtro abbia una risposta rettangolare non modifica i risultati precedenti. Si può infatti generalmente considerare tale risposta

rettangolare come quella di un filtro equivalente avente la stessa energia in uscita, ed uguale ampiezza a centro banda, sempre nella ipotesi che il filtro reale sia a banda stretta.-

Similmente a quanto detto per la C (τ), si può anche oer la misura W (f) pensare, o di memorizzare X (t) per il tempo T o di operare tante misure di W (f), avendo ogni volta spostata la frequenza centrale del filtro di B, oppure di disporre di un banco di filtri adiacenti che coprono una banda totale sufficiente.-

3-6 Funzione di correlazione incrociata
Spettro di potenza incrociata

Date due funzioni aleatorie stazionarie X(t) ed Y(t), aventi densità di probabilità congiunta p(x, y) si definisce la funzione di correlazione incrociata statistica :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = E\left[X(t)\cdot Y(t-\tau)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_t \cdot y_{t-\tau} \cdot p(x_t, y_{t-\tau}) \cdot dx_t \cdot dy_{t-\tau} \qquad (3\text{-}44)$$

Si definisce poi la funzione di correlazione incrociata temporale, nel caso di funzioni ad energia infinita, come :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\cdot Y(t-\tau)\cdot dt \qquad (3\text{-}45)$$

Nel caso le due funzioni X(t) ed Y(t) siano ergodiche, si ha coincidenza tra i valori forniti dalla (3-44) e dalla (3-45).

A differenza della funzione di autocorrelazione, la $C_{xy}(\tau)$ è genericamente una funzione non pari e complessa. Ancora rappresenta un metodo di analizi incompleto. Si noti che è genericamente $C_{xy}(\tau) \neq C_{yx}(\tau)$, ovvero la (3-45) fornisce risultati diversi a secondo che lo spostamento relativo delle due funzioni avvenga in una direzione o nell'altra dell'asse dei tempi. E poi $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$; in tal caso infatti lo spostamento relativo è sempre nello stesso senso.

La funzione di correlazione incrociata dà una misura della coerenza esistente tra le due funzioni in esame. Nel caso di funzioni aleatorie centrate, generate separatamente, la funzione $X(t) \cdot Y(t-\tau)$ assume valori positivi e negativi di ugual distribuzione statistica per cui la media (3-45) è nulla, ovvero $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(\tau) = 0$.

In tal caso le funzioni sono dette incoerenti.

Se le due funzioni non sono centrate si ha :

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(\tau) = m_{1x}\cdot m_{1y}$$

In genere nel caso di funzioni aleatorie la coerenza implica che una delle funzioni sia derivata dell'altra tramite qualche trasformazione che ne

.../...

ha modificato solo parzialmente le caratteristiche. Ad esempio una rotazione costante di fase di un rumore caotico a banda stretta.

Similmente a quanto fatto nel paragrafo 3-2 si può anche qui definire uno spettro di potenza incrociata $W_{xy}(f)$. Ci siamo riferiti nella (3-45) a funzioni ad energia infinita. Consideriamo ora due funzioni ausiliarie $X_T(t)$ ed $Y_T(t)$, definite secondo la (3-14). Queste ammetteranno trasformata di Fourier che indicheremo rispettivamente come $F_x(f)$ ed $F_y(f)$. Se si considera ora la (3-45) nel caso generico di funzioni complesse si può scrivere, applicando Parseval :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) \cdot Y_T^*(t-\tau)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int F_x(f) \cdot F_y^*(f) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{F_x(f) \cdot F_y^*(f)}{T} \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} W'_{xy}(f) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df \qquad (3\text{-}46)$$

ove si è posto :

$$W'_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{F_x(f) \cdot F_y(f)}{T} \qquad (3\text{-}47)$$

La (3-47) definisce la densità di potenza incrociata $W'_{xy}(f)$.

La (3-46) mostra che $C_{xy}(\tau)$ e $W'_{xy}(f)$ sono ancora legati dalla trasformazione di Fourier. È poi quindi :

$$W'_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xy}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \qquad (3\text{-}48)$$

Si può notare dalla definizione (3-47) che tutte le coppie di funzioni $F_x(f)$ ed $F_y(f)$ che presentano stesso prodotto $F_x(f) \cdot F_y^*(f)$ per ogni valore della frequenza, presentano stesso spettro di potenza incrociata, e quindi stessa funzione di correlazione incrociata. Si ha perciò in genere molte coppie di funzioni che presentano stesso spettro di potenza incrociata. In tal senso le su definite funzioni $C_{xy}(\tau)$ e $W'_{xy}(f)$ rappresentano una descrizione incompleta della coppia di funzioni X (t) ed Y (t).

Anche la $W'_{xy}(f)$, come la $C_{xy}(\tau)$, può essere usata per dare una misura della coerenza esistente tra le due funzioni X(t) ed Y(t) in esame.

.../...

Si può dire infatti generalmente che :

- se $X(t)$ ed $Y(t)$ sono due funzioni aleatorie centrate incoerenti, allora $W'_{xy}(f) = 0$ per tutti i valori di f.

- se risulta $/W'_{xy}(f)/^2 = W'_x(f) \cdot W'_y(f)$, allora si ha coerenza tra le due funzioni. Se queste sono gaussiane tale condizione assicura la coerenza totale.

- se oltre alla suddetta condizione risulta pure che $W'_{xy}(f)$ è reale e pari, allora le due funzioni sono dette colineari.

- se oltre alla suddetta condizione è invece $W'_{xy}(f)$ immaginaria e dispari, allora le due funzioni sono dette in quadratura. In tal caso la $C_{xy}(\tau)$ è una funzione reale dispari ed è $C_{xy}(0) = 0$.

3-7 Correlazione incrociata di segnali complessi.

Vediamo ora alcune proprietà generali delle funzioni di correlazione e spettro di potenza nel caso di segnali complessi. Si considerino due funzioni complesse :

$$z(t) = x_1(t) + jy_1(t),$$
$$s(t) = x_2(t) + jy_2(t) \qquad (3\text{-}49)$$

Si calcoli la funzione di correlazione incrociata tra $z(t)$ ed $s(t)$.

Si ha :

$$C_{zs}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) \cdot s^*(t-\tau) \cdot dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[x_1(t) + j\,y_1(t)\right] \cdot \left[x_2(t-\tau) - j\,y_2(t-\tau)\right] \cdot dt =$$

$$= C_{x_1x_2}(\tau) + C_{y_1y_2}(\tau) + j\,C_{y_1x_2}(\tau) - j\,C_{x_1y_2}(\tau) \qquad (3\text{-}50)$$

La $C_{zs}(\tau)$ è quindi genericamente una funzione complessa.

Nel caso particolare in cui $z(t) = s(t)$, la $C_{zs}(t)$ diviene la funzione di autocorrelazione :

$$C_{zz}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{yy}(\tau) + j\,C_{yx}(\tau) - j\,C_{xy}(\tau) =$$
$$= C_{xx}(\tau) + C_{yy}(\tau) + j\left[C_{yx}(\tau) - C_{yx}(-\tau)\right] =$$
$$= C_R(\tau) + j\,C_I(\tau) \qquad (3\text{-}51)$$

.../...

Quindi anche la funzione di autocorrelazione di una funzione complessa è ancora una funzione complessa per $\tau \neq 0$, e reale per $\tau = 0$. In tal caso infatti è $C_I(\tau) = 0$.

Si noti poi che la $C_R(\tau)$ è una funzione reale e pari in τ, mentre $C_I(\tau)$ è una funzione reale e dispari in τ.

Trasformando secondo Fourier la (3-51) si ottiene ancora che lo spettro di potenza è reale ; e precisamente :

$$W'_{zz}(f) = W'_{xx}(f) + W'_{yy}(f) - 2\,V'_{yx}(f) \qquad (3\text{-}52)$$

ove con V'_{yx} si è indicata la parte immaginaria dello spettro

$W'_{yx}(f) = U'_{yx}(f) + j\,V'_{yx}(f)$, relativo al termine $C_{yx}(\tau)$.

Se si ha incoerenza tra parte reale ed immaginaria di $z(t)$, si ha allora che $W'_{zz}(f) = W'_{xx}(f) + W'_{yy}(f)$.

La (3-52) fornisce un risultato già noto, ovvero che lo spettro di potenza $W'_{zz}(f)$ è sempre una funzione reale, come deducibile direttamente della sua definizione (3-18).

Ciò giustifica nuovamente l'uso del complesso coniugato nella definizione della $C(\tau)$ per funzioni complesse.

Torniamo ora alla espressione generica (3-50) e consideriamo il caso in cui $z(t)$ ed $s(t)$ sono due <u>funzioni analitiche</u> ; ovvero $y_1(t) = \hat{x}_1(t)$ ed $y_2(t) = \hat{x}_2(t)$, ove con il simbolo $\wedge$ si è indicata le operazione di trasformazione di Hilsert (1-37). Si può in questo caso dimostrare, ricorrendo al Teorema di Parseval ed alle relazioni (1-33), che è :

$$C_{\hat{x}_1\hat{x}_2}(\tau) = C_{x_1x_2}(\tau) \; ; \; C_{\hat{x}_1x_2}(\tau) = -C_{x_1\hat{x}_2}(\tau) \; ; \qquad (3\text{-}53)$$

Da questa si ottiene, sostituendo nella (3-50) :

$$C_{zs}(\tau) = 2\,C_{x_1x_2}(\tau) + j\,2\,C_{\hat{x}_1x_2}(\tau) \qquad (3\text{-}54)$$

Se si pone inoltre $z(t) = s(t)$, si ottiene

$$C_{zz}(\tau) = 2\,C_{xx}(\tau) + j\,2\,C_{\hat{x}x}(\tau) \qquad (3\text{-}55)$$

.../...

Si sviluppi ora la $C_{\hat{x}x}(\tau)$ secondo Parseval ; si ha :

$$C_{\hat{x}x}(\tau) = \frac{1}{T}\int \hat{x}(t)\cdot x(t-\tau)\,dt = \frac{1}{T}\int \hat{F}(f)\cdot F^{*}(f)\cdot e^{j\omega\tau}\cdot df \qquad (3\text{-}56)$$

ove è $\hat{F}(f) = -\,j\,F(f)$ per $f>0$ (3-57)

$\hat{F}(f) = \quad j\,F(f)$ per $f<0$ (3-58)

Dalle proprietà (3-57) e (3-58) deriva che :

$$C_{\hat{x}x}(\tau) = \int_{-\infty}^{0} j\,W'_{xx}(f)\,e^{j\omega\tau}\,df - \int_{0}^{+\infty} j\,W'_{xx}(f)\,e^{j\omega\tau}\,df =$$

$$= \int_{0}^{\infty} j\,W'_{xx}(-f)\,e^{-j\omega\tau}\,df - \int_{0}^{\infty} j\,W'_{xx}(f)\,e^{j\omega\tau}\,df$$

ed essendo poi :

$W'_{xx}(-f) = W'_{xx}(f)$, si ottiene :

$$C_{\hat{x}x}(\tau) = j\int_{0}^{\infty} W'_{xx}(f)\left\{e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}\right\}df = 2\int_{0}^{\infty} W'_{xx}(f)\,\sin\omega\tau\cdot df \qquad (3\text{-}59)$$

$C_{\hat{x}x}(\tau)$ è quindi una funzione reale e dispari e si annulla per $\tau = 0$.

Ricordiamo che è poi :

$$C_{xx}(\tau) = 2\int_{0}^{\infty} W'_{xx}(f)\cdot\cos\omega\tau\cdot df \qquad (3\text{-}60)$$

Della (3-59) si deduce che la trasformata di $C_{\hat{x}x}(\tau)$ è una funzione immaginaria dispari, la cui ampiazza è ancora uguale a $W'_{xx}(f)$.

La funzione $C_{zz}(\tau) = 2\,C_{xx}(\tau) + j\,2\,C_{\hat{x}x}(\tau)$ soddisfa quindi anch'esse alle condizioni di analiticità, come deducibile dalla proprietà della sua trasformata. Infatti, per $f>0$ si ha :

$$W'_{zz}(f) = 2\,W'_{xx}(f) + 2\,W'_{xx}(f) = 4\,W'_{xx}(f)$$

e per $f<0$: $W'_{zz}(f) = 2\,W'_{xx}(f) - 2\,W'_{xx}(f) = 0$ (3-61)

.../...

Quindi, la funzione di autocorrelazione di una funzione analitica è ancora una funzione analitica.

Dimostriamo ora un interessante teorema, che si applica ai segnali di tipo a "banda stretta" ; a quei segnali cioè per i quali è $f_o \gg W$, ove W è la larghezza della banda di frequenze occupata attorno alla portante f_o.

Tale Teorema si enuncia nel modo seguente :

L'inviluppo della funzione di correlazione incrociata di due segnali a banda stretta, che occupano la stessa banda di frequenze, è uguale al modulo della funzione di correlazione incrociata dei rispettivi segnali analitici.

Rappresentiamo infatti i rispettivi segnali analitici nella forma seguente :

$$\begin{aligned} z(t) &= [A(t) + j\,B(t)] \cdot e^{j\omega_o t} \\ s(t) &= [\alpha(t) + j\,\beta(t)] \cdot e^{j\omega_o t} \end{aligned} \qquad (3\text{-}62)$$

I due segnali a banda stretta originari saranno perciò espressi nel seguente modo :

$$\mathrm{Re}\,[z(t)] = A(t)\cos\omega_o t - B(t)\sin\omega_o t = \sqrt{A(t)^2 + B(t)^2}\cdot\cos\left[\omega_o t + \arctan\frac{-B(t)}{A(t)}\right] \qquad (3\text{-}63)$$

$$\mathrm{Re}\,[s(t)] = \alpha(t)\cos\omega_o t - \beta(t)\sin\omega_o t = \sqrt{\alpha(t)^2 + \beta(t)^2}\cdot\cos\left[\omega_o t + \arctan\frac{-\beta(t)}{\alpha(t)}\right] \qquad (3\text{-}64)$$

Si calcoli ora la funzione di correlazione incrociata tra $z(t)$ ed $s(t)$.

Si ottiene : (scrivendo A al posto di $A(t)$, α_τ al posto di $\alpha(t-\tau)$, etc...)

$$C_{zs}(\tau) = \frac{1}{T}\int (A+jB)\cdot(\alpha_\tau - j\beta_\tau)\cdot e^{j\omega_o t}\cdot e^{-j\omega_o t}\cdot e^{j\omega_o \tau}\cdot dt =$$

$$= e^{j\omega_o\tau}\cdot\frac{1}{T}\int (A+jB)(\alpha_\tau - j\beta_\tau)\,dt =$$

$$= e^{j\omega_o\tau}\left\{C_{A\alpha}(\tau) + C_{B\beta}(\tau) + j\left[C_{B\alpha}(\tau) - C_{A\beta}(\tau)\right]\right\} =$$

$$= \left[\cos\omega_o\tau\cdot\gamma(\tau) - \sin\omega_o\tau\cdot\lambda(\tau)\right] +$$

$$+ j\left[\sin\omega_o\tau\cdot\gamma(\tau) + \cos\omega_o\tau\cdot\lambda(\tau)\right] \qquad (3\text{-}65)$$

.../...

ove si è indicato con :

$$\gamma(\tau) = C_{A\alpha}(\tau) + C_{B\beta}(\tau) \qquad (3\text{-}66)$$

$$\lambda(\tau) = C_{B\alpha}(\tau) - C_{A\beta}(\tau) \qquad (3\text{-}67)$$

Si ha poi dalla (3-54) che la funzione di correlazione delle parti reali di $z(t)$ ed $s(t)$ è data da :

$$C_{Re[z],Re[s]}(\tau) = \frac{1}{2}\left[\cos\omega_0\tau \cdot \gamma(\tau) - \sin\omega_0\tau \cdot \lambda(\tau)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2(\tau)+\lambda^2(\tau)} \cdot \cos\left[\omega_0\tau + \arctan\frac{-\lambda(\tau)}{\gamma(\tau)}\right] \qquad (3\text{-}68)$$

L'inviluppo di $C_{Re[z],Re[s]}(\tau)$ è quindi dato da $\sqrt{\gamma^2(\tau)+\lambda^2(\tau)}$

La stessa espressione si ottiene del resto calcolando il modulo della (3-65), il che dimostra l'enunciato teorema.

3-8 Funzione di autocorrelazione congiunta

La funzione di autocorrelazione congiunta opera una analisi contemporanea del comportamento della funzione in esame $X(t)$ nei domini di tempo e frequenza. Essa si esprime generalmente come $C(\tau, \phi)$, funzione delle due variabili τ, spostamento nel tempo, e ϕ spostamento nella frequenza. La funzione $C(\tau, \phi_0)$ rappresenterà quindi la funzione di autocorrelazione $C(\tau)$ calcolata quando lo spettro del segnale sia stato spostato della quantità ϕ_0. Per illustrare il significato di tale funzione si consideri un generico segnale analitico :

$$X(t) = s(t) \cdot e^{j\beta(t)} \qquad (3\text{-}69)$$

ove $a(t)$ e $\beta(t)$ rappresentano rispettivamente la modulazione di ampiezza e di fase.

La funzione di autocorrelazione $C(\tau)$, nel caso di spostamento del segnale solo sull'asse dei tempi, è data da :

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot X(t-\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t-\tau) \cdot e^{j[\beta(t-\tau)-\beta(t)]} \cdot dt$$

Se è poi

$\beta(t) = \omega_0 \cdot t$, si ha : (3-70)

$$C(\tau) = e^{j\omega_0\tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t-\tau) \cdot dt \qquad (3\text{-}71)$$

Questo rappresenta il caso di un segnale portante $e^{j\omega_0 t}$ modulato in ampiezza dal segnale $s(t)$.

.../...

Si consideri ora la trasformata di X(t), F(f), e si operi uno spostamento ϕ di tale funzione.

Si può ora definire la <u>funzione di correlazione di fase</u> :

$$\varsigma(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(f) \cdot F(f+\phi)\, df \qquad (3\text{-}72)$$

Tale funzione, mediante Parseval, risulta uguale a :

$$\varsigma(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t) \cdot X(t) \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt \qquad (3\text{-}73)$$

Ovvero $\varsigma(\phi)$ è la trasformata di Fourier secondo la variabile ϕ del quadrato del modulo del segnale, ovvero della potenza istantanea.

Si consideri ora di operare uno spostamento τ sull'asse dei tempi e ϕ sull'asse della frequenza.

Si ottiene in tal caso :

$$X(t-\tau, \phi) = s(t-\tau) \cdot e^{j[\beta(t-\tau) + 2\pi\phi\cdot(t-\tau)]} \qquad (3\text{-}74)$$

$$C(\tau, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot X^*(t-\tau, \phi) \cdot dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t-\tau) \cdot e^{j\beta(t)} \cdot e^{-j\beta(t-\tau)} \cdot e^{-j2\pi\phi\cdot(t-\tau)} \cdot dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot X^*(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\phi\cdot(t-\tau)} \cdot dt$$

Da questa si ottiene :

$$C(\tau, \phi) = e^{j2\pi\phi\cdot\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt \qquad (3\text{-}75)$$

Ovvero la funzione di autocorrelazione di un segnale complesso che si sposta nel tempo ed in frequenza può esprimersi mediante funzioni del tempo e solo spostamento nel tempo, mentre un termine periodico esponenziale rappresenta lo spostamento in frequenza.

La $C(\tau, \phi)$ è detta funzione di <u>autocorrelazione congiunta</u>. Questa è esprimibile anche nel dominio della frequenza mediante funzioni della frequenza e solo spostamento nella frequenza, mentre lo spostamento nel tempo è assegnato ad un esponenziale periodico. Tale espressione è ricavabile applicando Parseval alla (3-75). Si ottiene :

$$\frac{C(\tau, \phi)}{e^{j2\pi\phi\tau}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau) \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(f) \cdot F(f+\phi) \cdot e^{j2\pi f\tau} \cdot df \qquad (3\text{-}76)$$

.../...

Una proprietà della funzione $C(\tau, \phi)$ è che il volume sotto la superficie descritta dal suo inviluppo $|C(\tau, \phi)|^2$, è costante, indipendentemente dalla funzione $X(t)$; ovvero :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C(\tau, \phi)|^2 \, d\tau \cdot d\phi = C \qquad (3\text{-}77)$$

Se l'energia del segnale $X(t)$ è normalizzata ad 1, allora è anche $C = 1$.

Si noti inoltre che per $\tau = 0$ è $C(0, \phi) \equiv \varsigma(\phi)$,

e per $\phi = 0$ è $C(\tau, 0) \equiv C(\tau)$

Si calcoli ora a titolo di esempio le funzioni $C(\tau)$ e $\varsigma(\phi)$ per il segnale analitico $X(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{j\omega_0 t}$

Si ottiene :

$$C(\tau) = \frac{1}{T}\int \text{rect}\frac{t}{T} \cdot \text{rect}\frac{t-\tau}{T} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 \tau} \cdot dt =$$

$$= e^{j\omega_0 \tau} \cdot \left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right] \qquad (3\text{-}78)$$

Si ha poi, applicando la (3-75) :

$$\varsigma(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(f) \cdot F(f+\phi) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\text{rect}\frac{t}{T}\right|^2 \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\frac{t}{T} \cdot e^{-j2\pi\phi t} \cdot dt =$$

$$= \frac{\sin \pi\phi t}{\pi\phi t} \qquad (3\text{-}79)$$

Nella Fig. 35 sono rappresentati le parte reale del segnale $X(t)$ e la funzione $|C(\tau, \phi)|$.

Le funzioni $|C(\tau)|$ e $|\varsigma(\phi)|$ rappresentano le due sezioni rispettivamente con i piani $\phi = 0$ e $\tau = 0$ della funzione $|C(\tau, \phi)|$.

Vediamo ora di mettere in evidenza il significato della funzione $C(\tau, \phi)$ di un assegnato segnale $X(t)$.

Ricorrendo sempre all'esempio precedente, si supponga che il segnale $X(t) = 1/\sqrt{T} \cdot \text{rect}\, t/T \cdot e^{j\omega_0 t}$ sia il segnale trasmesso da un sistema Sonar, e sia $X(t-\tau, \phi)$ quello ricevuto come eco di ritorno con ritardo da un bersaglio in movimento, che produce uno spostamento della frequenza centrale $\frac{\omega_0}{2\pi}$ per effetto Doppler della quantità ϕ.

.../...

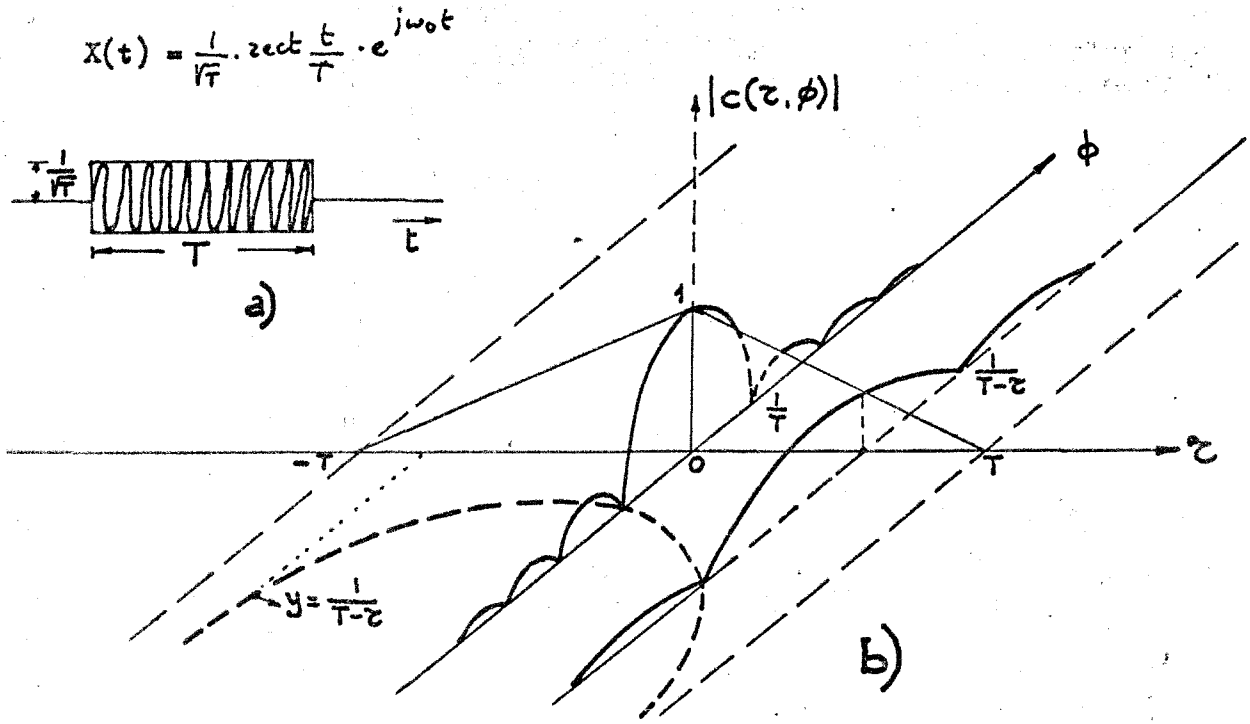


Fig. 35

Per la rivelazione del segnale $X(t-\tau, \phi)$ in presenza di rumore si dimostra, come verrà mostrato in seguito, che il sistema ottimo ai fini del miglioramento del rapporto segnale/rumore è quello di correlare il segnale ricevuto con quello trasmesso. Nel caso in cui al ricevitore sia presente il segnale $X(t-\tau, \phi)$, il correlatore dovrà fornire in uscita la funzione $C(\tau, \phi)$.

Ora τ e ϕ sono due parametri incogniti; sarà quindi necessario calcolare la $C(\tau, \phi)$ per molte coppie di valori τ_i, ϕ_i , tanti da poter descrivere in modo sufficientemente completo la funzione di correlazione congiunta $C(\tau, \phi)$. Sarà proprio l'andamento della $C(\tau, \phi)$ a suggerire la distanza tra i punti τ_i, ϕ_i .

Servendoci sempre dell'esempio di Fig. 35, b), questa ci suggerisce che sarà sufficiente calcolare la $C(\tau, \phi)$ ad intervalli $\Delta\tau = \frac{1}{2}$ sull'asse della τ, e $\Delta\phi = \frac{1}{T}$ sull'asse della ϕ. Si potrà perciò pensare che tutti i punti τ_i, ϕ_i , a distenza $\Delta\tau, \Delta\phi$, costituiscano un reticolo nel piano τ, ϕ, che viene sovrapposto sulla funzione $C(\tau, \phi)$; Tale sovrapposizione sarà casuale, tale essendo il valore di τ e ϕ del segnale ricevuto. Il sistema di correlazione dovrà fornire il valore della $C(\tau, \phi)$ per ogni punto τ_i, ϕ_i del reticolo. Le dimenzioni massime del reticolo dipendono dal campo di possibili ritardi τ e spostamenti Doppler ϕ. Normalmente il sistema di correlazione può fornire una seria molto lunga (infinita) di punti sull'asse τ , e limitata sull'asse ϕ ; questa limitazione essendo legata alla possibile massima velocità del bersaglio.

.../...

L'esame della funzione $C(\tau, \phi)$ mostra la capacità di risoluzione del segnale $X(t)$ in presenza di rumore, sia in τ che in ϕ, in un intorno del punto $\tau = 0$, $\phi = 0$. Tale capacità può essere espressa dai valori $\partial\tau$ e $\partial\phi$ minimi per i quali è ancora possibile risolvere i due segnali $X(t-\tau, \phi)$ ed $X(t-\tau+\partial\tau, \phi + \partial\phi)$, in presenza di rumore.

Normalmente gli intervalli $\Delta\tau$ e $\Delta\phi$ di distanza tra i punti del reticolo vengono scelti uguali agli intervalli di risoluzione.

A proposito degli intervalli di risoluzione, la loro definizione non è sempre così ovvia, come ad esempio nel caso di Fig. 35, b), ove $C(\tau)$ ha un andamento triangolare. Un metodo di definizione può essere il seguente:

$$\partial\tau = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cdot d\tau}{C(0)} \qquad (3\text{-}80)$$

$$\partial\phi = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} C(\phi) \cdot d\phi}{C(0)} \qquad (3\text{-}81)$$

Un sistema per realizzare tecnicamente il correlatore per il segnale di Fig. 35, a), potrebbe essere quello di disporre di un banco di filtri, ognuno dei quali abbia una risposta in frequenza del tipo (3-79) attorno ad una frequenza centrale.

Il valore di quest'ultima dovrà essere pari ad $\frac{\omega_0}{2\pi} \pm K \cdot \Delta\phi$, tale che la distanza della frequenza centrale di due filtri adiacenti sia $\Delta\phi$. La risposta impulsiva del filtro a frequenza centrale $\frac{\omega_0}{2\pi}$ sarà uguale al segnale $X(-t) = X(t)$, ($X(t)$ è qui una funzione pari). Ci riserviamo di dimostrare in seguito che la risposta del filtro, a frequenza centrale $\frac{\omega_0}{2\pi} + K \cdot \Delta\phi$, al segnale $X(t-\tau, K \cdot \Delta\phi)$ è uguale alla funzione di correlazione $C(\tau, K \cdot \Delta\phi)$. In questo sistema il banco di filtri presenta la $C(\tau, \phi)$ continua rispetto a τ, e campionata ad intervalli $\Delta\phi$ rispetto alla variabile ϕ, tale essendo l'intervallo tra i filtri.

Se il segnale $X(t)$ è del tipo $\frac{\sin x}{x}$, anzichè l'impulso rettangolare di Fig. 35, a), la sua funzione $C(\tau, \phi)$ può essere ottenuta ruotando di 90° la rappresentazione di Fig. 35, b), leggendo W al posto di T ed $\frac{1}{W}$ al posto di $\frac{1}{T}$; W rappresenta ora la banda di frequenza occupata dal segnale.

Si noti infine che la funzione $C(\tau, \phi)$ è anche chiamata <u>funzione di ambiguità</u>, in quanto offre una descrizione dell' errore introdotto nella misura di τ da un spostamento ϕ, o viceversa.

Si ritornerà su questo concetto nel seguito.