

CAP. 7 - La rivelazione del segnale in presenza di rumore. Criterio del massimo rapporto segnale-disturbo.

7-0 Introduzione

Il problema della rivelazione di un segnale in presenza di rumore e' quello di ottimizzare il sistema di ricezione nel senso di minimizzare la **probabilità** di errore relativa alla decisione segnale presente o **segnale assente**. Tale problema spesso contrasta con altri quali quelli della massimizzazione della precisione di misura di alcuni parametri (Ad esempio la distanza ed il Doppler del bersaglio in un sistema Sonar o Radar).

La ottimizzazione del sistema di ricezione e' in definitiva un **problema** di teoria della decisione, ma viene spesso affrontato anche **secondo altri** criteri, spesso meno completi ma piu' immediati. Questi sono **principalmente** i criteri energetici. Della teoria della decisione si fara' **cenno in seguito**.

Un criterio energetico e' quello della massimizzazione del rapporto segnale (S) - disturbo (N), S/N ; di questo ci occupiamo in questo capitolo.

7-1 Il criterio della massimizzazione del rapporto S/N .

Tale criterio puo' generalmente essere considerato come quello della ottimizzazione di una misura di energia, compiuta sulla **funzione in esame**, ove la presenza del segnale viene evidenziata mediante la **diversa** quantita' di energia misurabile quando il segnale e' presente **assieme** al rumore, rispetto a quando solo il rumore e' presente.

Il sistema di misura sara' generalmente costituito da elementi lineari, seguiti da un elemento non lineare. Quest'ultimo provoca un mescolamento tra segnale e rumore, cosi' che la definizione del **segnale** e del **rumore** all'uscita del misuratore di energia presenta delle **difficolta'**. Si dovra' cioe' ricercare nella funzione all'uscita quella **grandezza**, "segnale all'uscita" che rappresenta convenientemente la presenza del segnale e quella funzione, "disturbo", che rappresenta il disturbo nella osservazione della precedente. Se il criterio di decisione applicato sulla funzione di uscita del misuratore di energia e' basato sulla deviazione di un indicatore, allora il "segnale d'uscita sara' rappresentato dall'ampiezza di una deviazione. **Date** le precedenti definizioni, si potra' definire il rapporto segnale-disturbo all'uscita del misuratore di energia, o di lettura, $\left(\frac{S}{N}\right)_u$. Questo e' definito come il rapporto

tra il valore statistico medio dell'ampiezza del "segnale d'uscita" ed il valore statistico medio della intensita' del "disturbo d'uscita". E' da notare tuttavia che le definizioni di segnale e rumore all'uscita sono spesso del tutto soggettive a causa della mescolazione tra segnale e rumore d'ingresso prodotta dall'elemento non lineare. Soltanto nel caso in cui la potenza d'ingresso del rumore sia notevolmente superiore a quella del segnale si puo' trascurare la presenza di termini di interazione e divenire ad una valida definizione. Considereremo nel seguito che questa condizione sia verificata ogniqualvolta si deve considerare la presenza di un elemento non lineare.

Per riaffermare le suddette considerazioni, si abbia un misuratore di energia operante sulla funzione d'ingresso $x(t) = s(t) + n(t)$, ove $s(t)$ e' il segnale che si vuole rivelare, $n(t)$ il rumore, che assumiamo essere

descrivibile mediante una funzione ergodica centrata gaussiana di potenza σ_n^2 .

Supponiamo che il segnale $s(t)$ abbia durata θ ed abbia potenza istantanea costante nell'intervallo $0 - \theta$. Supponiamo di conoscere a priori il valore di θ . Operiamo ora una misura di energia nel tempo $\tau = \theta$, ed indichiamo con u la potenza media in tale intervallo.

Operiamo tale misura ripetutamente sulla funzione $x(t) = n(t)$ quando c'è solo rumore, scegliendo arbitrariamente gli intervalli di misura $\tau = \theta$ sull'asse dei tempi.

La potenza così misurata u_n sarà descrivibile mediante una variabile aleatoria, della quale interessano il valore medio $E[u_n] = \sigma_n^2$, e la varianza $E[u_n^2] - E[u_n]^2 = \sigma_{u_n}^2$.

Operiamo poi la misura di potenza media nell'intervallo $\tau = \theta$ quando $x(t) = s(t) + n(t)$, scegliendo la posizione di τ sull'asse dei tempi in modo da contenere $s(t)$ completamente. Ripetiamo tale misura per ogni successivo ripetersi di tale avvenimento.

La potenza media misurata u_{s+n} sarà ancora descrivibile mediante una variabile aleatoria di valore medio $E[u_{s+n}]$. Una tipica rappresentazione di u_n ed u_{s+n} è quella di Fig. 52.

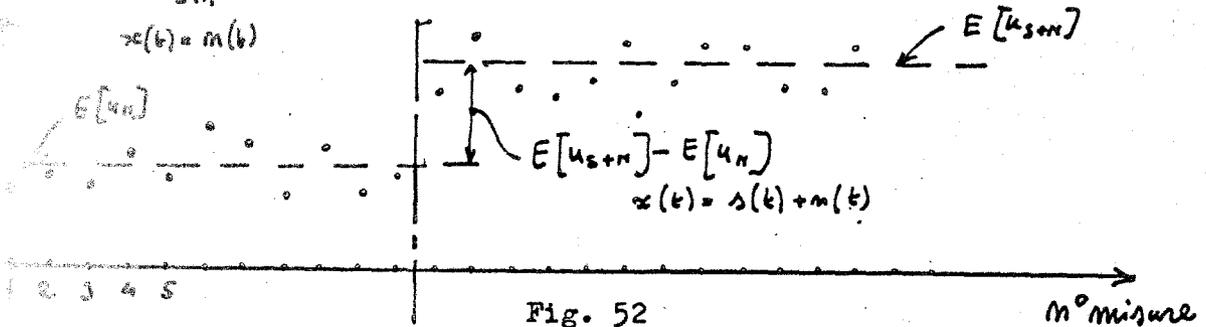


Fig. 52

Il segnale all'uscita può essere rappresentato dalla deviazione dei valori medi $E[u_{s+n}] - E[u_n]$. Il disturbo che accompagna l'osservazione di tale deviazione è rappresentato dalla fluttuazione della misura, il cui valore quadratico medio, nel caso di potenza di rumore d'ingresso maggiore della potenza del segnale, è grossomodo la stessa sia quando il segnale è presente che quando è assente, ed è data da $(E[u_n^2] - E[u_n]^2)^{1/2}$.

Nel caso in esame si può quindi definire il rapporto S/N all'uscita o di lettura come:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u = \frac{E[u_{s+n}] - E[u_n]}{(E[u_n^2] - E[u_n]^2)^{1/2}} \quad (7-1)$$

In ogni caso il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_u$ è funzione della potenza media del segnale e del rumore all'ingresso, ovvero del loro rapporto $\frac{S}{N}$ all'ingresso. W allora:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u = f\left\{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}\right\} \quad (7-2)$$

ove la funzione f e' generalmente una funzione monotona che dipende da come il segnale ed il rumore all'uscita sono definiti, dagli elementi lineari e non lineari interposti tra i punti definiti come ingresso ed uscita, e dalla struttura statistica del segnale e del rumore.

E' necessaria a questo punto qualche precisazione circa la definizione del rapporto $(S/N)_{IN}$. Se segnale e rumore sono entrambi rappresentabili mediante due funzioni ergodiche gaussiane, non vi e' nessuna difficolta' nella definizione della potenza media del segnale e del rumore e quindi di $(S/N)_{IN}$. Se il segnale ha durata finita, la media della sua potenza, calcolata nell'intervallo θ , avra' valore dipendente dal valore di θ , scelto come durata del segnale. Un criterio e' quello di scegliere il valore di θ per il quale il valore della potenza media e' massimo. Tale criterio presuppone la conoscenza a priori della struttura temporale del segnale. In tal senso e' sempre valida la definizione di $(S/N)_{IN}$, come rapporto di potenze medie, ove si precisi pero' che la media e' operata nell'intervallo di definizione del segnale. Ovvero:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} = \frac{\text{potenza media del segnale nella sua durata}}{\text{potenza media del rumore}} = \frac{E[u_s]}{E[u_n]} \quad (7-3)$$

La scelta dell'intervallo τ nel quale opera il misuratore di energia del sistema non lineare di rivelazione, per un assegnato valore di θ , ha influenza sul valore della (7-2), per un dato valore di $(S/N)_{IN}$.

Diremo il τ del misuratore di energia ottimizzato quando la (7-2) ha valore massimo per un dato valore di θ . Il sistema di rivelazione e' generalmente costituito da un misuratore di energia che opera nel tempo τ (Rivelatore quadratico + integratore, R-I), seguito da un sistema di decisione D (Fig. 53,a). Quest'ultimo puo' pensarsi costituito da una "soglia" posta sulla funzione di uscita $u(t)$, la cui ampiezza e' proporzionale all'energia della funzione d'ingresso $x(t)$ contenuta nei precedenti τ secondi. Il sistema di decisione elementare e' quello che decide "segnale presente" o "segnale assente" in corrispondenza del superamento della soglia da parte del segnale $u(t)$ o meno.

Il comportamento statistico del sistema di decisione e' funzione del rapporto $(S/N)_u$. E' generalmente vero che un aumento di $(S/N)_u$ comporta una

diminuzione degli errori di decisione e quindi il criterio che viene seguito a questo punto e' quello di massimizzare $(S/N)_u$ per un dato segnale, trascurando per il momento di analizzare quantitativamente i suoi effetti sul sistema di decisione.

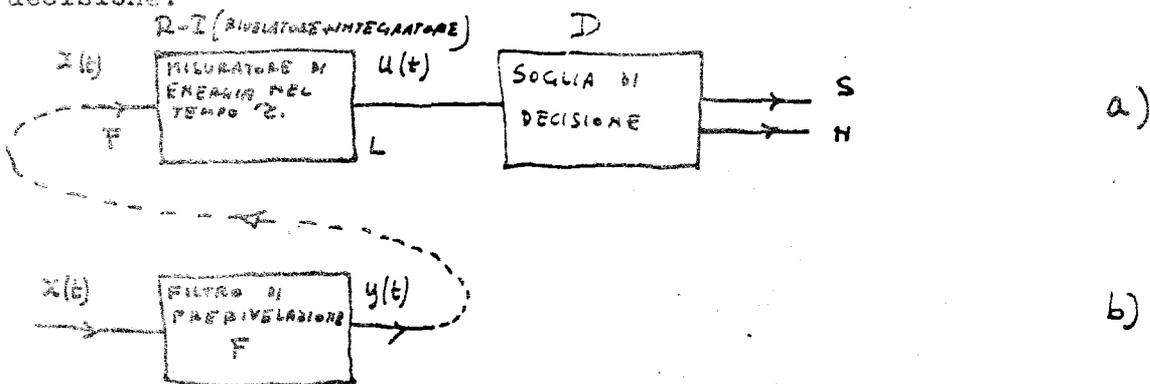


Fig. 53

Ottimizzare il sistema di rivelazione basato sulla misura energetica significa quindi massimizzare il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_u$ all'ingresso del sistema di decisione.

Per un dato rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_m$ all'ingresso di R-I, tale ottimizzazione può essere fatta solo scegliendo opportunamente l'intervallo di integrazione τ , in base alla distribuzione nel tempo dell'energia del segnale e del rumore.

Supponiamo ora che si sia già scelto il valore ottimo di τ . In tal caso per migliorare $\left(\frac{S}{N}\right)_u$ non resta, quando possibile, che aumentare il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_m$.

Questo può essere fatto qualora il segnale presenti determinate caratteristiche, note a priori, oltre una eventuale maggior energia necessaria per una rivelazione incoerente, tali da poterlo differenziare dal rumore. L'utilizzazione di tali caratteristiche può essere fatta inserendo tra l'ingresso di R-I ed il segnale d'ingresso $x(t)$ un elemento di prerivelazione che generalmente è costituito da un filtro lineare (filtro di prerivelazione), Fig. 53, b). Al tipo di elemento filtro lineare faremo riferimento nel seguito, salvo specifico avviso. L'elemento di prerivelazione sarà ottimizzato quando sfrutterà tutta la conoscenza a priori sul segnale e sul rumore. Dopo l'inserzione del filtro F sull'ingresso $x(t)$, al Rivelatore-Integratore verrà inviato il segnale $y(t)$ d'uscita dal filtro. Il Rivelatore-Integratore dovrà allora essere eventualmente riadattato a questo nuovo segnale $y(t)$ nel senso della scelta del valore ottimo di τ , nel caso che la distribuzione temporale dell'energia di Sed N sia modificata da F . Si può quindi vedere come sia possibile agire su F e su τ (variando F) ai fini della ottimizzazione totale.

Il procedimento è quello di scrivere per ogni caso le relazioni che legano $\left(\frac{S}{N}\right)_u$ ad $\left(\frac{S}{N}\right)_m = \left(\frac{S}{N}\right)_{x(t)}$ alla funzione di trasferta $H(f)$ del filtro lineare ed agli altri parametri in gioco.

Il legame tra il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_x$ ed $\left(\frac{S}{N}\right)_y$, rispettivamente all'ingresso ed all'uscita di F , è facilmente ottenibile. Si ha infatti, detta τ la durata di $s(t)$:

$$\begin{aligned} x_s(t) &\iff X_s(f) && \text{, segnale } s(t) = x_s(t) \\ x_{n,\tau}(t) &\iff X_{n,\tau}(f) && \text{, rumore } n(t) = x_n(t) \\ &&& \text{per } 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned}$$

Il rapporto $\frac{S}{N}$ prima del filtro F è dato da:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_x = \frac{E[u_s(t)]}{E[u_n(t)]} = \frac{E\left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_s(t)^2 dt\right]}{E\left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_{n,\tau}(t)^2 dt\right]} = \frac{E\left[\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_s(f)|^2 df\right]}{E\left[\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{n,\tau}(f)|^2 df\right]} \quad (7-4)$$

Nell'ipotesi di rumore ergodico si ha:

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{n,\tau}(f)|^2 df = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_{n,\tau}(f)|^2}{\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} W'_{n,x}(f) df$$

ove con $W'_{n,x}(f)$ si è indicato lo spettro di potenza del rumore $x(t)$.

La (7-4) diviene allora:

$$\left(\frac{S}{H}\right)_x = \frac{E\left[\frac{1}{2} \cdot \int |X_s(f)|^2 df\right]}{\int W'_{n,x}(f) \cdot df} = \frac{E\left[\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\tau} X_s(t)^2 dt\right]}{\int W'_{n,x}(f) \cdot df} \quad (7-5)$$

Nel caso in cui $s(t)$ ed $n(t)$ siano entrambi limitati in una banda di frequenze W e se $\tau \approx 1/W$, allora al misuratore di energia non spetterà più una vera e propria operazione di integrazione in τ , essendo questa già assicurata approssimativamente dalla condizione $\tau \approx 1/W$, bensì sarà sufficiente una misura della potenza istantanea. Si avrà quindi, detto Δ l'istante in cui $X_s(t)$ è massimo:

$$\left(\frac{S}{H}\right)_x = \frac{E[X_s^2(\Delta)]}{E[X_n^2(t)]} = \frac{E[X_s^2(\Delta)]}{\sigma_{n,x}^2} \quad (7-6)$$

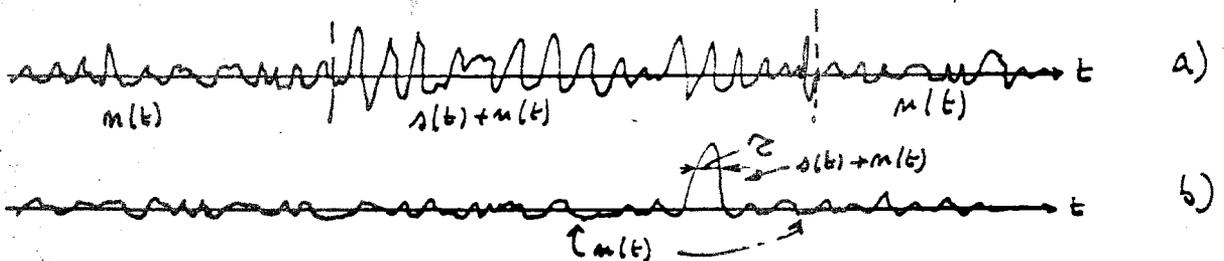


Fig. 54

Nel caso in cui $\tau \gg \frac{1}{W}$, ovvero segnale di durata quasi illimitata, la (7-5) diviene (Fig. 54, a):

$$\left(\frac{S}{H}\right)_x = \frac{\int W'_{s,x}(f) \cdot df}{\int W'_{n,x}(f) \cdot df} = \frac{\sigma_{s,x}^2}{\sigma_{n,x}^2} \quad (7-7)$$

Vediamo ora all'uscita del filtro F.

$$\begin{aligned} \text{Si ha:} \\ y_s(t) = X_s(t) \otimes h_F(t) &\iff Y_s(f) = X_s(f) \cdot H_F(f) \\ y_n(t) = X_n(t) \otimes h_F(t) &\iff Y_n(f) = X_n(f) \cdot H_F(f) \end{aligned} \quad (7-8)$$

$$\begin{aligned} W'_{n,y}(f) &= W'_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 \\ \left(\frac{S}{H}\right)_y &= \frac{E\left[\frac{1}{2} \cdot \int |Y_s(f)|^2 df\right]}{\int W'_{n,y}(f) \cdot df} = \frac{E\left[\frac{1}{2} \cdot \int \frac{|X_s(f)|^2}{\tau} \cdot |H_F(f)|^2 df\right]}{\int W'_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df} \end{aligned} \quad (7-9)$$

Ancora nel caso in cui $\tau \gg \frac{1}{W}$ si ottiene:

$$\left(\frac{S}{H}\right)_y = \frac{\int W'_{s,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df}{\int W'_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df} = \frac{\sigma_{s,y}^2}{\sigma_{n,y}^2} \quad (7-10)$$

E nel caso $\tau \approx \frac{1}{W}$ (Fig. 54, b):

$$\left(\frac{S}{H}\right)_y = \frac{E[Y_s^2(\Delta)]}{\int W'_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df} = \frac{E\left[\left\{\int X_s(f) \cdot H_F(f) \cdot e^{j2\pi f \Delta} df\right\}^2\right]}{\int W'_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df} \quad (7-11)$$

Lo schema generico di rivelazione, sempre nell'ipotesi d'inserzione del filtro lineare di prerivelazione, e' il seguente:

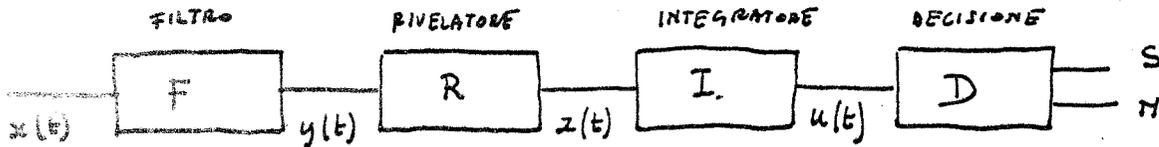


Fig. 56

Anche l'integratore puo' essere descritto come un filtro lineare di funzione di trasferta $H_I(f)$.

7-2 - Caso in cui il segnale e' una funzione aleatoria indipendente dal rumore

Supponiamo ora di voler ottimizzare il sistema F, R-I di Fig. 56, nel caso in cui il segnale $s(t)$ e' una funzione aleatoria gaussiana, indipendente dal rumore, anch'esso gaussiano.

Dobbiamo distinguere i vari casi seguenti:

1. Segnale $s(t)$ di durata quasi-illimitata.

(Il segnale ha una durata grande e tale da poter in essa considerare il rumore stazionario).

Considereremo nel seguito il rivelatore R del tipo quadratico. (I risultati seguenti sono validi anche per rivelatore lineare a condizione di piccolo $\frac{S}{N}$ d'ingresso). Calcoliamo il rapporto $(S/N)_u$ facendo uso della definizione (7-1). Il segnale all'uscita del misuratore d'energia, nell'ipotesi di indipendenza tra $s(t)$ ed $n(t)$, e' dato da:

$$E[u_{s+n}(t)] - E[u_n(t)] = E[u_s(t)] = \int W'_{s,y}(f) \cdot |H_f(f)|^2 \cdot df = \sigma_{s,y}^2 \quad (7-12)$$

Il rumore all'uscita del misuratore e' costituito dalle fluttuazioni della misura istantanea $u(t)$ attorno al valore medio. Se si considera lo spettro del rumore dopo la rivelazione quadratica, di questo la componente continua non contribuirà alle fluttuazioni di $u(t)$, bensì la parte descrivibile, secondo la (6-15), come l'integrale di autocorrelazione dello spettro di potenza del segnale $y_n(t)$; ovvero:

$$W'_{n,z}(f) = 2 \cdot \int W'_{n,y}(\phi) \cdot W'_{n,y}(f-\phi) \cdot d\phi \quad (7-13)$$

E dopo l'integratore I si avra':

$$\sigma_{n,u}^2 = \int W'_{n,z}(f) \cdot |H_I(f)|^2 \cdot df = E[u_n^2(t)] - E[u_n(t)]^2 \quad (7-14)$$

Supponiamo ora che l'integrazione sia forte, ovvero $\tau \gg 1/\Delta f$, ove Δf e' la banda del rumore. Si ha allora, facendo uso della (7-13):

$$\sigma_{N,u}^2 \cong W'_{N,z}(0) \cdot \int |H_I(f)|^2 df = 2 \cdot \int W'_{N,y}(f) \cdot df \cdot \int |H_I(f)|^2 df \quad (7-15)$$

Il termine $\int |H_I(f)|^2 df = \gamma$ dipende dal tipo di integratore utilizzato. Consideriamo qui i seguenti tre casi:

a. Integratore con risposta impulsiva rettangolare. E' allora:

$$h_I(t) = \frac{1}{T} \text{rect } t/T \Rightarrow H_I(f) = \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_I(f)|^2 df = \frac{1}{\pi T} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 d(\pi f T) = \frac{1}{T} \quad (7-16)$$

b. Integratore RC

$$|H_I(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 \cdot f^2}$$

$$\gamma = \int |H_I(f)|^2 df = \frac{1}{2RC} \quad (7-17)$$

c. Filtro rettangolare di banda $-W, W$

$$\gamma = \int |H_I(f)|^2 df = 2W$$

Tenendo poi presente che $W'_{N,y}(f) = W'_{N,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2$, la (7-15) diviene:

$$\sigma_{N,u}^2 = 2 \cdot \gamma \cdot \int W'_{N,x}(f) \cdot |H_F(f)|^4 df \quad (7-18)$$

ove 2γ nei tre casi precedenti ha rispettivamente i valori $2/T, 1/RC, 4W$.

Il rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_u$ di lettura puo' allora scriversi:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_x^2 \cdot \frac{\left[\int w'_{S,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 df \right]^2}{\int w'^2_{N,x}(f) \cdot |H_F(f)|^4 df} \cdot 1/2\gamma \quad (7-19)$$

ove:

$$w'_{S,x}(f) = \frac{W'_{S,x}(f)}{\sigma_{S,x}^2} ; \quad w'_{N,x}(f) = \frac{W'_{N,x}(f)}{\sigma_{N,x}^2} \quad (7-20)$$

a. Facciamo ora l'ipotesi che $w'_{S,x}(f)$ e $w'_{N,x}(f)$ siano rettangolari in Δf (Fig. 57, a)

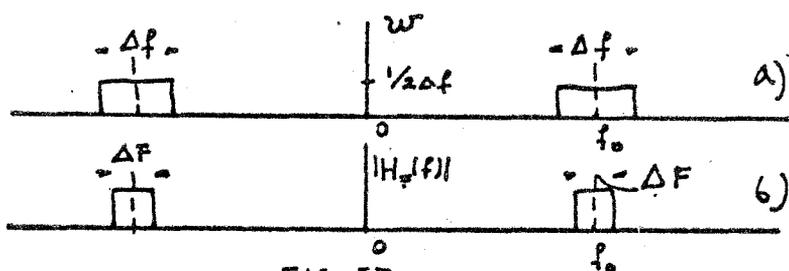


FIG. 57

Supponiamo che il filtro F abbia la risposta in frequenza di Fig. 57, b, ovvero sia piatto nella banda ΔF , attorno ad f_0 e ad attenuazione totale al difuori.

Si ha allora, per $\Delta F \leq \Delta f$:

$$\int w'_{s,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 \cdot df = \frac{2 \cdot \Delta F}{2 \cdot \Delta f}$$

da cui $\left[\int w'_{s,x}(f) \cdot |H_F(f)|^2 \cdot df \right]^2 = \frac{4 \Delta F^2}{4 \Delta f^2}$; e' poi:

$$\int w'^2_{n,x}(f) \cdot |H_F(f)|^4 \cdot df = \frac{2 \cdot \Delta F}{4 \cdot \Delta f^2}$$

E sostituendo nella (7-19):

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2_w = \left(\frac{S}{N} \right)^2_x \cdot \frac{\Delta F}{\Delta f} \quad (7-21)$$

ove $\frac{\Delta F}{\Delta f}$ assume nei tre casi precedenti rispettivamente le espressioni

$$2T \cdot \Delta F, RC \cdot \Delta F, \Delta F / 4W.$$

Si vede quindi dalla (7-21) che conviene aumentare ΔF al limite, $\Delta F = \Delta f$; questo suggerisce quindi in che modo si debba ottimizzare il filtro F.

Inoltre conviene fare l'integrazione il piu' forte possibile, ovvero:

$$\tau = 2T, RC, 1/2W, \quad \text{il piu' grande possibile.}$$

La limitazione al valore di τ e' in pratica stabilita dal periodo di stazionarieta', del rumore o del segnale, quale esso sia il minimo dei due.

Un esempio pratico del caso qui esaminato puo' essere costituito da un sistema che voglia stabilire se una data sorgente di radio-onde, contenute in una certa banda Δf attorno ad f_0 , e' in attivita' di trasmissione o meno quando il rapporto (S/N) e' $\ll 1$.

Un possibile schema di principio e' rappresentato in Fig. 58.

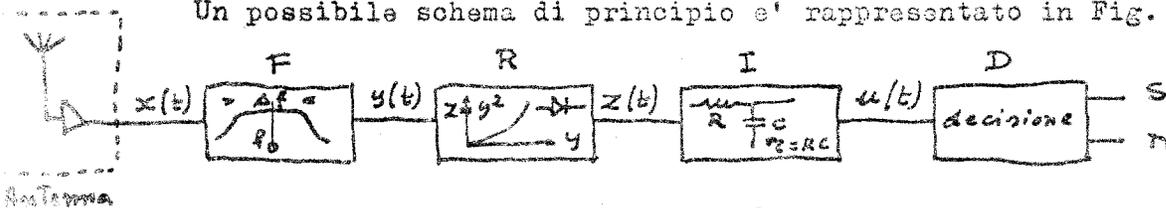


Fig. 58

b. Esaminiamo ora il caso in cui gli spettri $w'_{s,x}(f)$ e $w'_{n,x}(f)$ non hanno forma rettangolare come in Fig. 57, ma il loro andamento e' generico e noto.

Ci si domanda quale e' il filtro F che massimizza la (7-19).

A tale scopo ricordiamo qui la disuguaglianza di Schwarz; per due generiche funzioni integrabili $f(x)$ e $g(x)$. Si ha:

$$\left| \int f(x) \cdot g(x) \cdot dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 \cdot dx \cdot \int |g(x)|^2 \cdot dx \quad (7-22)$$

nella quale l'uguaglianza e' assicurata per $f(x) = k g^*(x)$. Consideriamo ora la (7-19), e poniamo nella (7-22):

$$f(x) = \frac{w'_{s,x}(f)}{w'_{n,x}(f)}; \quad g(x) = |H_F(f)|^2 \cdot w'_{n,x}(f) \quad (7-23)$$

Si ha allora la condizione di uguaglianza:

$$k \cdot |H_F(f)|^2 = \frac{w'_{s,x}(f)}{w'^2_{n,x}(f)} = \frac{w'_{s,x}(f)}{w'^2_{n,x}(f)} \cdot \frac{\sigma^4_{n,x}}{\sigma^2_{s,x}} \quad (7-24)$$

che massimizza la (7-19).

La (7-24) definisce le caratteristiche del filtro di prerivelazione ottimo nel caso di segnale e rumore caotici e stazionari, con spettri di potenza noti.

Tale filtro e' adattato agli spettri di potenza di $s(t)$ e di $n(t)$, essendo questa l'unica conoscenza a priori utilizzabile.

La funzione di trasferta del filtro F e' data dalla (7-24); ovvero :

$$|H_F(f)| = \sqrt{\frac{w_{s,x}'(f)}{w_{n,x}'^2(f)}} \cdot 1/\sqrt{K} \quad (7-25)$$

quindi tutti quei filtri lineari il cui modulo della loro funzione di trasferta soddisfa alla (7-25), sono ottimizzati nel senso della massimizzazione della (7-19).

2. Segnale $S(t)$ aleatorio e di durata finita θ .

E' questo un caso di piu' difficile trattazione analitica. Genericamente possiamo dire che, nell'ipotesi che siano noti gli spettri di potenza medi del segnale e del rumore si potra' pensare di applicare ancora un filtro di prerivelazione che sfrutti tale conoscenza, secondo quanto dettato dalla (7-25). Se e' nota la distribuzione temporale media della energia del segnale si potra' scegliere la costante di integrazione τ in modo da massimizzare il rapporto segnale-disturbo (7-2).

Se ne' la distribuzione dell'energia in funzione del tempo, ne' in funzione della frequenza presentano mediamente dei valori piu' elevati in particolari punti delle loro rappresentazioni, se cioe' spettro di potenza e potenza istantanea presentano sui loro intervalli di rappresentazione (banda Δf e durata del segnale θ) un valore statistico medio costante, il sistema di rivelazione ottimo sara' costituito da un filtro lineare F , rettangolare nella banda Δf , seguito da un misuratore di energia R-I operante con costante di tempo $\tau = \theta$.

Il presente caso di segnale aleatorio di durata finita puo' ad esempio verificarsi in un sistema Sonar quando si osservi l'eco di ritorno da un branco di pesci, tali che le dimensioni esterne del ~~branco~~ ^{branco} non cambino sensibilmente durante le successive osservazioni e che al contrario la distribuzione nel branco dei vari elementi cambi da eco ad eco.

7-3 Caso di segnale sinusoidale a frequenza costante.

Consideriamo ora il problema della rivelazione di un segnale sinusoidale di frequenza f_0 , in presenza di rumore.

Si suppone nel seguito il segnale di durata quasi-illimitata, rimandando al paragrafo 7-4 la trattazione della rivelazione ottima di un impulso sinusoidale di durata finita.

E' intuitivo che il filtro d'entrata ottimo, quello cioe' che opera la miglior rivelazione del segnale rispetto al rumore, e' un filtro ^{costante} attorno alla frequenza f_0 , di banda la piu' stretta possibile. Quando il filtro e' molto stretto non e' piu' necessario integrare dopo il rivelatore quadratico R , a meno che la costante di integrazione τ sia superiore all'inverso della banda ΔF del filtro F .

Quindi l'operazione di filtraggio puo' essere affidata o al filtro F, oppure all'integratore I; cioè, o prima o dopo l'elemento non lineare R.

E' questo un caso particolarmente evidente per chiedersi se convenga filtrare prima o dopo di R.

Vedremo come il filtraggio prima di R sia il piu' conveniente, perlomeno per quanto e' consentito operarlo dal punto di vista tecnologico; d'altra parte un tale risultato e' prevedibile facilmente quando si pensi che tale sistema e' quello che sfrutta la totale conoscenza a priori delle caratteristiche del segnale e del rumore (in questo caso la frequenza del segnale). Consideriamo ancora la condizione di $\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} \ll 1$.

1. Filtraggio debole - Integrazione forte ($\tau \gg 1/\Delta F$).

Consideriamo ancora il rivelatore del tipo quadratico. E' qui ancora applicabile lo stesso procedimento di calcolo usato per ricavare la (7-19). Unica differenza e' il segnale.

$$\text{Si ha: } s(t) = a \cdot \cos 2\pi f_0 t \quad (7-26)$$

$$E[u_{s+n}(t)] - E[u_n(t)] = E[u_s] = u_s = \frac{1}{2} a^2 \cdot |H_F(f_0)|^2 \quad (7-27)$$

E nel caso in cui $2\delta = 1/RC$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot RC \cdot \frac{|H_F(f_0)|^4}{\int_{N,x} W_{N,x}^2(f) \cdot |H_F(f)|^4 \cdot df} \quad (7-28)$$

Facciamo l'ipotesi che il rumore sia bianco e di spettro rettangolare di banda Δf , e che il filtro F sia rettangolare (Fig 57, b). Si ha allora:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot 2RC \cdot \frac{\Delta f^2}{\Delta F} \quad (7-29)$$

Della (7-29) si vede come convenga fare ΔF piccolo il piu' possibile ed allargare Δf , a parita' di potenza totale di rumore. Questa seconda operazione equivarrebbe allora ad una diminuzione della densita' spettrale del rumore nella banda ΔF interessata, essendo la potenza del rumore assunto costante in funzione di ΔF . Tale condizione non e' quasi mai verificata in pratica.

Se si sceglie $\Delta F = \Delta f$, si ottiene dalla (7-29):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot 2RC \cdot \Delta f \quad (7-29 \text{ bis})$$

2. Filtraggio forte, integrazione debole. ($\tau \lesssim \frac{1}{\Delta F}$).

Consideriamo ancora il rivelatore quadratico. La funzione del gruppo R-I e' qui quella di rivelatore quadratico di involuppo. L'integratore ha principalmente il compito di eliminare le componenti attorno alla frequenza $2f_0$, prodotta dall'operazione non lineare. Tuttavia il gruppo R-I puo' essere ancora considerato come misuratore di energia nel tempo τ , ove $\tau < \frac{1}{\Delta F}$.

Essendo poi il segnale all'ingresso di R-I nel tempo τ circa costante, ne deriva che la misura di potenza operata da R-I e' circa costante al decrescere di τ ; quindi e' una misura di potenza istantanea.

Il rumore all'uscita dell'integratore I e' costituito dalla parte fluttuante di $u(t)$. Per il suo calcolo interessa quindi solamente il termine (7-13) dello spettro di potenza dopo il rivelatore R. Si ha quindi:

$$\sigma_{N,u}^2 = \int W'_{N,z}(f) \cdot |H_z(f)|^2 \cdot df \approx \int W'_{N,z}(f) df = \quad (7-30)$$

$$= 2 \cdot \iint W'_{N,y}(\phi) \cdot W'_{N,y}(f-\phi) d\phi \cdot df =$$

$$= 2 \iint W'_{N,x}(\phi) \cdot |H_F(\phi)|^2 \cdot W'_{N,x}(f-\phi) \cdot |H_F(f-\phi)|^2 d\phi \cdot df \quad (7-31)$$

Supponiamo ora che il filtro d'ingresso sia rettangolare e molto stretto, di banda ΔF , e che il rumore all'uscita possa considerarsi di densita' spettrale costante in ΔF . (Fig. 59, a).

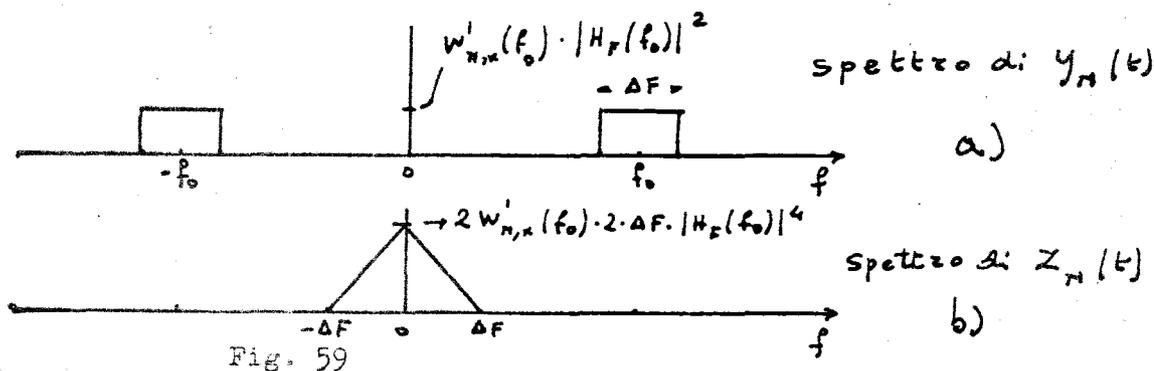


Fig. 59

Lo spettro all'uscita del rivelatore quadratico ha la parte bassa frequenza del tipo di Fig. 59, b). Dalla (7-30) e dalla Fig. 59, b) si ricava allora:

$$\sigma_{N,u}^2 = 4 \cdot \Delta F^2 \cdot W'_{N,x}(f_0) \cdot |H_F(f_0)|^4 \quad (7-32)$$

ed infine:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot W_{N,x}^2(f_0) \cdot \Delta F^2} \quad (7-33)$$

Dalla (7-33) si vede come convenga fare ΔF il piu' piccolo possibile.

Confrontiamo ora i due casi 1) e 2). Supponiamo il rumore bianco anche nel caso 2) e contenuto nella banda Δf . Allora si avra':

$$W'_{N,x}(f_0) = \text{cost} = 1/2 \Delta f, \text{ per cui la (7-33) diviene:}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot \frac{\Delta f^2}{\Delta F^2} \quad (7-34)$$

Confrontiamo ora la (7-34) con la (7-29, bis). Precisamente, per una stessa banda Δf del rumore d'ingresso, vediamo, a parità di $(S/N)_u$, quale è quella delle due operazioni prima descritte

(filtraggio forte, integrazione forte) che richiede valore minore di $(S/N)_{IN}$. Uguagliando le (7-34) e (7-29, bis) si ha:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot \frac{\Delta f^2}{\Delta F^2} = \left(\frac{S}{N}\right)_{IN}^2 \cdot 2RC \cdot \Delta f \quad (7-35)$$

Facendo poi il confronto per una stessa larghezza di banda ΔF , sia per F che per I, si ha:

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN, \Delta F}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{IN, RC}} = \sqrt{\frac{2RC \Delta F^2}{\Delta f}} = \sqrt{\Delta F / \Delta f} \quad (7-36)$$

Essendo poi in entrambi i casi $\Delta F \ll \Delta f$, si ricava:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{IN, \Delta F} \ll \left(\frac{S}{N}\right)_{IN, RC} \quad (7-37)$$

dalla quale si può concludere che il sistema di filtraggio forte è migliore di quello ad integrazione forte, per rumore uniforme e limitato nella banda Δf . Praticamente converrebbe quindi fare il filtro F il più stretto possibile, per quanto consentito tecnicamente. Un ulteriore guadagno nel rapporto S/N potrebbe essere poi affidato all'integratore.

Il caso qui esaminato è a prova del principio generale, del resto intuitivo, secondo il quale le operazioni non lineari sulla funzione $x(t)$, nella quale si vuole rivelare il segnale $s(t)$, vanno differite il più possibile nella catena delle varie operazioni che si compiono nella rivelazione.

7-4. Rivelazione di segnali determinati - I filtri adattati.

Consideriamo ora il problema della ottimizzazione del sistema di rivelazione, genericamente schematizzato in Fig. 54, nel caso in cui il segnale $s(t)$ è di durata limitata T ed è completamente o parzialmente determinato, ed il rumore $n(t)$ è noto statisticamente ed è stazionario.

Si dovrà qui realizzare il filtro F di prerivelazione in modo da fruttare tutta la conoscenza a priori del segnale e del rumore.

Normalmente alcuni dei parametri del segnale $s(t)$ da rivelare possono non essere noti ed addirittura aleatorii. (Ad esempio l'ampiezza e la frequenza di una eco Sonar di ritorno da un bersaglio in movimento). Di tale indeterminatezza dovrà tenersi conto opportunamente nel sistema di rivelazione, o facendo un sistema più largo, nel senso di accettare una certa somma di valori di uno o più parametri indeterminati, ovvero mettendo in parallelo un certo numero di sistemi di ricezione individualmente più stretti, centrati su determinati valori dei parametri. Il primo metodo corrisponde ancora poi all'applicazione nel filtro F di solo quelle caratteristiche del segnale che sono più probabilmente presenti all'atto della rivelazione.

Un'ottimizzazione di tale sistema dal punto di vista energetico è possibile, mentre la valutazione del sistema costituito da molti rivelatori in parallelo è solo possibile dal punto di vista probabilistico.

Consideriamo nel seguito il segnale $s(t)$ completamente determinato. Ci proponiamo di studiare le caratteristiche da assegnare al filtro F in modo da ottimizzare la rivelazione.

Avendo per ipotesi il segnale durata limitata T , il meglio che ci si può aspettare dal filtro è che esso trasformi il segnale ed il rumore in modo tale che la potenza istantanea del segnale ad un certo istante Δ , $y_s^2(\Delta)$, sia la più grande possibile rispetto alla potenza media del rumore. Il rivelatore R e l'integratore I avranno quindi solo la funzione di rivelatore di involuppo. Se veramente tutta la conoscenza a priori del segnale sarà stata sfruttata nel filtro F , il segnale all'uscita non dovrà differire dal rumore se non nella potenza istantanea. In tal caso il filtro F sarà ottimizzato. Vediamo ora analiticamente come si esprimono le caratteristiche del filtro in funzione del segnale e del rumore.

Consideriamo il rumore $n(t)$ stazionario, bianco, di densità spettrale $W_n(f) = N_0/2$. Se indichiamo con $H_F(f)$ la funzione di trasferta del filtro F , la potenza del rumore all'uscita è data da :

$$\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot df = \sigma_{n,y}^2$$

Il segnale all'uscita del filtro, quando $t = \Delta$, è dato da :

$$y_s(\Delta) = \int S(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f \Delta} df \quad (7-51)$$

ove $S(f) \Leftrightarrow s(t)$.

Il rapporto S/N all'uscita del filtro F , quando Δ corrisponde all'istante di massima potenza istantanea, è dato da :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_F = \rho = \frac{[y_s(\Delta)]^2}{\sigma_{N,Y}^2} = \frac{\left[\int S(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f \Delta} df\right]^2}{\frac{N_0}{2} \cdot \int |H(f)|^2 df} \quad (7-52)$$

Si vuole ora scegliere $H(f)$ in modo da massimizzare la (7-52). Facendo uso della disuguaglianza di Schwarz (7-22), ove si ponga :

$$H(f) = f(x), \text{ ed } S(f) \cdot e^{j2\pi f \Delta} = g(x),$$

si ottiene :

$$\rho \leq \frac{2}{N_0} \cdot \int |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0} \quad (7-53)$$

ove si è indicata con $E = \int |S(f)|^2 df$ l'energia del segnale.

L'uguaglianza nella (7-22) è ottenuta quando $f(x) = K \cdot g^*(x)$.

Quindi sarà $\rho = \frac{2E}{N_0}$ (valore massimo), quando :

$$H(f) = K \cdot S^*(f) \cdot e^{-j2\pi f \Delta} \quad (7-54)$$

che, nel caso si scelga $\Delta = 0$ e $K = 1$, assume la forma :

$$H(f) = S^*(f) \quad (7-55)$$

Tale espressione coincide con la (5-30). Ovvero il filtro F ottimo, che massimizza cioè il rapporto S/N , è un filtro adattato, per il quale sono valide le proprietà generali riportate al paragrafo 5-5. Cioè, si ha :

$$H(f) = S^*(f); \quad h(t) = s(-t) \quad (7-56)$$

inoltre l'integrale di convoluzione tra il segnale d'ingresso $s(t)$ e la risposta impulsiva $h(t)$ è proporzionale alla funzione di autocorrelazione del segnale $s(t)$. Si ha infatti, detta $y_s(t)$ la funzione d'uscita :

$$y_s(t) = \int s(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \int s(\tau) \cdot s(\tau-t) d\tau = C_{ss}(t) \quad (7-57)$$

Tale proprietà può essere meglio visualizzata dalla Fig. 63, ove è qui $h(t) = s(-t + \Delta)$. Si ha infatti che la funzione d'uscita è ottenuta sommando le risposte impulsive dei vari contributi elementari nei quali si suddivide il segnale $s(t)$. Si ottiene in definitiva ancora la (7-57), ovvero :

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int s(\tau) \cdot s(\tau-t+\Delta) d\tau = \\ &= \int s(\tau) \cdot s(\tau-t') \cdot d\tau = C_{ss}(t') \end{aligned} \quad (7-57')$$

ove si è posto $t' = t - \Delta$.

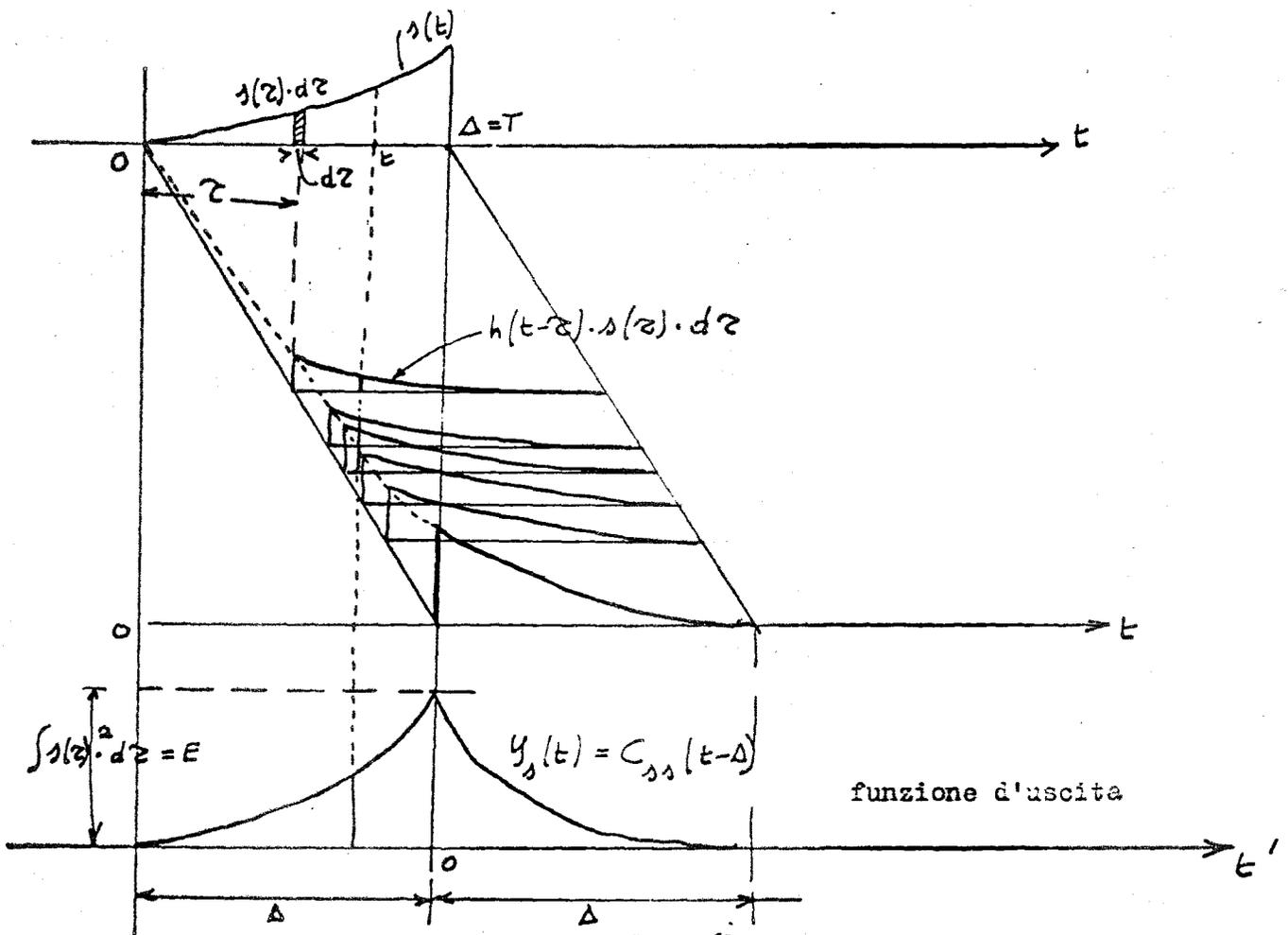


Fig. 63

La funzione d'uscita $y_s(t)$ dal filtro adattato, quando all'ingresso vi è il segnale $s(t)$, gode della stessa proprietà vista a proposito della funzione di autocorrelazione. Tale funzione presenta cioè un massimo assoluto per $t' = 0$, ed è reale e pari.

Il valore di $y_s(t)$ per $t = t'$, è uguale all'energia E del segnale $s(t)$. Inoltre la trasformata di Fourier della funzione d'uscita, $Y_s(f)$, è proporzionale allo spettro di energia del segnale d'ingresso (ovvero allo spettro di potenza quando si divide il primo membro della (7-57) per la durata T del segnale). Tale funzione è anch'essa reale e pari.

Si ha infatti :

$$Y_s(f) = S(f) \cdot H(f) = |S(f)|^2 \quad (7-58)$$

Essendo poi la funzione $y_s(t')$ reale e pari, ed essendo la $h(t)$ una funzione causale, la $y_s(t')$ dovrà essere nulla per $t < 0$. È quindi necessario che la funzione $s(t)$ si sviluppi tutta per valori negativi della variabile $t' = t - \Delta$, di modo che il massimo della funzione $C_{ss}(t')$ si avrà quando tutte le parti elementari $s(\tau) \cdot d\tau$ di cui si compone $s(t)$ avranno attaccato il filtro adattato. (Fig. 63).

Al filtro è quindi richiesta una memoria pari alla durata T del segnale $s(t)$. In tale durata si estende infatti l'integrale di convoluzione.

Vediamo ora altre proprietà dei filtri adattati.

a) Essendo $H(f) = S^*(f)$, si ha :

$$Y_s(f) = S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 \quad (7-59)$$

Quindi il filtro adattato opera una rotazione di fase su ogni vettore, definito dal numero complesso $S(f_i)$ per ogni valore di $f = f_i$, in modo tale da annullare la loro fase. Ne consegue che la larghezza di banda del segnale $S(f)$ non viene modificata nel passaggio attraverso il filtro adattato, bensì soltanto la distribuzione spettrale, nel senso della elevazione alla seconda potenza di ogni ampiezza.

b) Si consideri poi il caso in cui il rumore $n(t)$ non è bianco, ma abbia invece una generica densità spettrale $W_{n,n}(f)$. Consideriamo allora un tratto di rumore di durata T , del quale possiamo ora definire la trasformata di Fourier $N_T(f)$. Se si considera ora di ricercare le caratteristiche del filtro F che massimizzano il rapporto ρ per un dato segnale $s(t)$, si ottiene la relazione :

$$H_T(f) = \frac{S^*(f)}{|N_T(f)|^2} \quad (7-60)$$

Facendo poi il limite di $\frac{|N_T(f)|^2}{T}$, per $T \rightarrow \infty$, si ottiene $W'_{N,x}(f)$ e dalla (7-60):

$$H(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} H_T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{S^*(f)}{|N_T(f)|^2 \cdot 1/T} = \frac{1}{T} \frac{S^*(f)}{W'_{N,x}(f)} \quad (7-61)$$

La (7-60) suggerisce la seguente spiegazione pratica:

Si inserisca un filtro F' , di risposta in frequenza $H'_T(f) = 1/N_T(f)$, prima del filtro adattato F . Lo spettro del rumore all'uscita di tale filtro sarà allora nuovamente bianco nella banda considerata. Lo spettro del segnale all'uscita di F' sarà proporzionale ad $S(f)/N_T(f) = S'(f)$.

Il filtro adattato per il nuovo segnale $S'(f)$ sarà tale da avere una risposta in frequenza $H''_T(f) = S^*(f)/N_T^*(f)$.

La risposta dei due filtri è data allora da:

$$H_T(f) = H'_T(f) \cdot H''_T(f) = \frac{S^*(f)}{|N_T(f)|^2} \quad (7-62)$$

che è uguale alla (7-60). Il filtro adattato ha quindi la proprietà di trasformare lo spettro del rumore in quello di rumore bianco.

c) Consideriamo nuovamente l'espressione del massimo rapporto segnale-disturbo:

$$\rho_{max} = \frac{2E}{N_0} = \rho_0 \quad (7-63)$$

ove N_0 è la densità spettrale del rumore, supposto bianco, ed E è l'energia del segnale. La (7-63) mostra che ρ_{max} dipende solo, a parità di N_0 , dell'energia E del segnale e non direttamente da altri parametri, quali durata, larghezza di banda, potenza di picco.

{ E' questo un risultato fondamentale importante in quanto suggerisce che, per migliorare le capacità di rivelazione di un segnale nel rumore con un filtro adattato l'unico sistema è quello di aumentarne l'energia E .
 { Segnali aventi stessa energia sono ugualmente efficaci.

d) Vediamo di esprimere ora la relazione tra rapporto segnale-disturbo all'uscita ed all'ingresso del filtro F . Sia la banda del filtro adattato estesa da $-W$ a W , e sia T la durata del segnale. La potenza del rumore e del segnale all'ingresso sono rispettivamente date da:

$$P_{N_{IN}} = N_0 \cdot W, \quad P_{S_{IN}} = E/T$$

Si ha quindi:

$$\rho_{IN} = \frac{P_{S_{IN}}}{P_{N_{IN}}} = \frac{E}{T \cdot W \cdot N_0} = \frac{\rho_0}{T \cdot W \cdot 2} \quad (7-64)$$

Da cui:

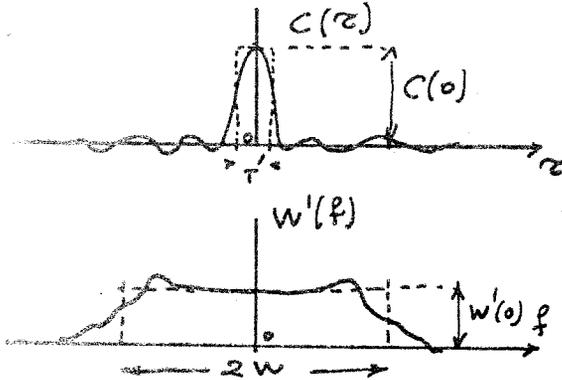
$$\rho_0 = \rho_{IN} \cdot 2WT \quad (7-65)$$

.../...

Il termine $2WT$ rappresenta quindi il guadagno in rapporto segnale - disturbo ottenibile col filtro adattato. Si noti che la (7-65) non contraddice la (7-63). Chi comanda è infatti ancora l'energia E . Se ad esempio si aumenta W , a parità di T e di E , ρ_{IN} diminuisce proporzionalmente (si lascia passare più rumore) e ρ_o rimane finalmente costante.

e) Vediamo ora quale sia il prodotto durata T' - larghezza di banda $2W$ all'uscita del filtro F quando è adattato al segnale d'ingresso $s(t)$.

La funzione d'uscita $y_s(t)$ è proporzionale alla funzione di autocorrelazione del segnale $\Delta(t)$ ed il suo spettro $Y_s(f)$ è proporzionale allo spettro di potenza di $\Delta(t)$. Si può ora definire una durata T' della funzione di correlazione ed una larghezza di banda $2W$ dello spettro nel seguente modo (Fig. 64) :



$$T' \cdot C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cdot d\tau \quad (7-66)$$

$$2 \cdot W \cdot W'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W'(f) \cdot df \quad (7-67)$$

Essendo poi :

$$C(0) = \int W'(f) \cdot df; W(0) = \int C(\tau) d\tau \quad (7-68)$$

Fig. 64

Si ottiene :

$$2 \cdot T' \cdot W \cong 1 \quad (7-69)$$

La (7-69) mostra quindi che il prodotto durata - larghezza di banda all'uscita del filtro adattato, quando all'ingresso vi sia il segnale in esame $\Delta(t)$, è circa uguale all'unità.

Questo risultato è particolarmente interessante nel caso della rivelazione di segnali aventi prodotto durata T - larghezza di banda $2W$ molto maggiore dell'unità ($2T \cdot W \gg 1$). Si ha infatti in tal caso che il filtro adattato opera una compressione dell'impulso di durata T , riducendolo in un impulso

di durata $T' \cong \frac{T}{N}$, ove $N = 2WT$.

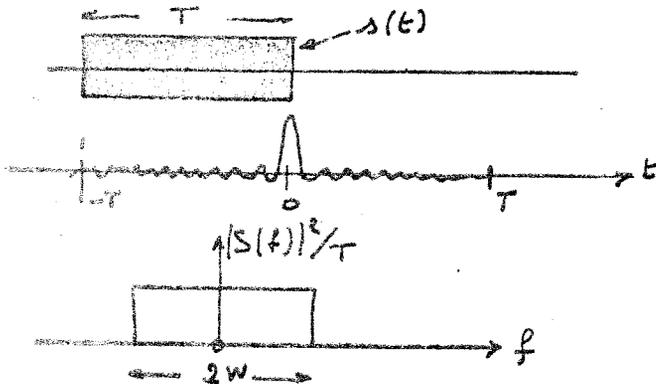


Fig. 65

Nell'esempio di Fig. 65, in cui sia lo spettro di potenza che l'involuppo di $\Delta(t)$ sono rettangolari, si può facilmente vedere che, se per semplicità si sceglie $|H(f)| = 1$, il valore efficace del rumore all'uscita del filtro adattato, nell'ipotesi di rumore bianco gaussiano, è lo stesso di quello in uscita di un filtro ^{PASSA}basso avente ancora $|H(f)| = 1$ e larghezza di banda pari a $2W$.

Se confrontiamo pertanto le uscite di questi due filtri, queste presenteranno lo stesso rumore (stesso valore efficace), mentre il segnale all'uscita del filtro adattato presenta un picco, la cui massima ampiezza $y_s(\Delta)$ è \sqrt{N} volte più grande del valore efficace del segnale $s(t)$, ovvero del segnale presente anche all'uscita del filtro passo basso. Questo può vedersi considerando che, nelle ipotesi di spettro rettangolare e ponendo $|H(f)| = 1$, si ha

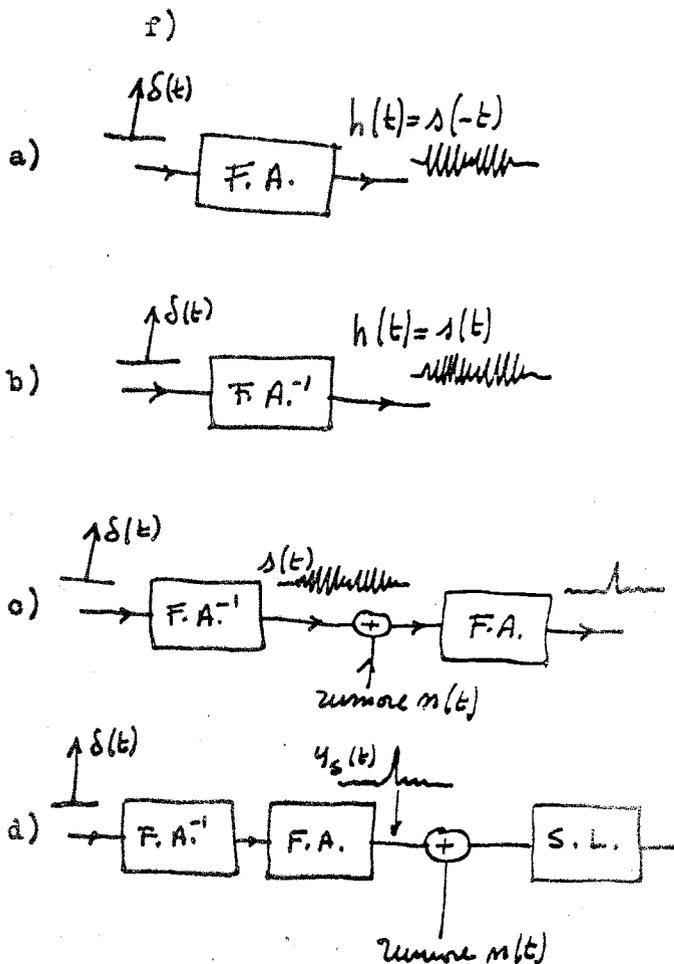
$$|y_s(f)|^2 = |S(f)|^2$$

Quindi l'energia del segnale $s(t)$ è la stessa di quella del segnale $y_s(t)$; essendo poi la durata $T' \cong \frac{T}{N}$, si ha, detta S_0 l'ampiezza di $s(t)$:

$$[y_s(\Delta)]^2 \cdot T' \cong \int_0^T |s(t)|^2 dt = \frac{S_0^2}{2} T = E \quad (7-70)$$

dalla quale :

$$y_s(\Delta) = \frac{S_0}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{N} \quad (7-71)$$



Il filtro adattato può essere schematicamente rappresentato come in Fig. 66 - a). Similmente si può introdurre un filtro adattato inverso o filtro generatore (F.A.⁻¹), caratterizzato dal fatto che la sua risposta impulsiva è uguale al segnale $s(t)$ - Fig. 66 - b). La funzione d'uscita del F.A. può essere considerata come la risposta impulsiva della catena dei due filtri suddetti, inseriti come in Fig. 66 - c). Qualora si debba esaminare il comportamento di un sistema lineare inserito tra il filtro F.A.⁻¹ ed F.A., essendo il sistema totale lineare, nulla vieta di inscrivere i due filtri come in Fig. 66 - d). Tale inserzione mostra che finalmente la risposta impulsiva del sistema F.A.⁻¹ + F.A. dipende solo dalla funzione $|S(f)|^2$, uguale alla funzione di trasferta totale. Ai fini della risposta impulsiva dei due filtri in cascata, questi possono essere quindi sostituiti da un filtro avente funzione di trasferta pari ad $|S(f)|^2$. Questa semplificazione non è più vera quando tra i due suddetti filtri si sia inserito un sistema lineare variante nel tempo.

Fig. 66

g) Finora si è considerato il segnale $s(t)$ reale.

Le suddette considerazioni possono estendersi ad un segnale $m(t)$ complesso. In tal caso anche il filtro adattato dovrà essere di forma complessa ed avere risposta impulsiva :

$$h(t) = m^*(-t)$$

Se indichiamo genericamente con $M(t) = a(t) + j b(t)$ il segnale complesso, il filtro adattato opererà l'integrale di convoluzione seguente :

$$\begin{aligned} y_m(t) &= \int m(z) \cdot h(t-z) \cdot dz = \int [a(z) + j b(z)] \cdot [a(z-t) - j b(z-t)] dz = \\ &= C_{aa}(t) + C_{bb}(t) + j [C_{ba}(t) - C_{ab}(t)] \end{aligned}$$

(7-72)

Se indichiamo genericamente con $p(t) = d(t) + j \beta(t)$, un generico segnale ricevuto, costituito dal rumore $n(t)$ al quale può essere sommato il segnale $m(t)$, o meno, la (7-72) diviene in tal caso :

$$y_{mp}(t) = C_{\alpha a}(t) + C_{\beta b}(t) + j [C_{\beta a}(t) - C_{\alpha b}(t)] \quad (7-73)$$

Il filtro adattato opera quindi genericamente, nel caso si tratti di segnali complessi, quattro funzioni di correlazione elementari. Uno schema di tale operazione è riportato in Fig. 67 - a), secondo la quale il filtro adattato complesso è costituito da due coppie di filtri lineari, di risposta impulsiva $\alpha(-t)$ e $\beta(-t)$. Ricordando poi che, finalmente, per la rivelazione del segnale $m(t)$ nel rumore, si dovrà operare una misura di energia, si dovrà ricavare il modulo della funzione complessa, ai fini della sua rivelazione.

Particolarmente, qualora il segnale $m(t) = a(t) + j \hat{a}(t)$ fosse analitico, allora la (7-73) si riduce a :

$$y_{mp}(t) = 2 C_{\alpha a}(t) + j 2 C_{\alpha \hat{a}}(t) \quad (7-73 \text{ bis})$$

Sarà in tal caso sufficiente operare con la parte reale di $p(t)$, $\alpha(t)$. Il corrispondente schema è ora rappresentato in Fig. 67 - b).

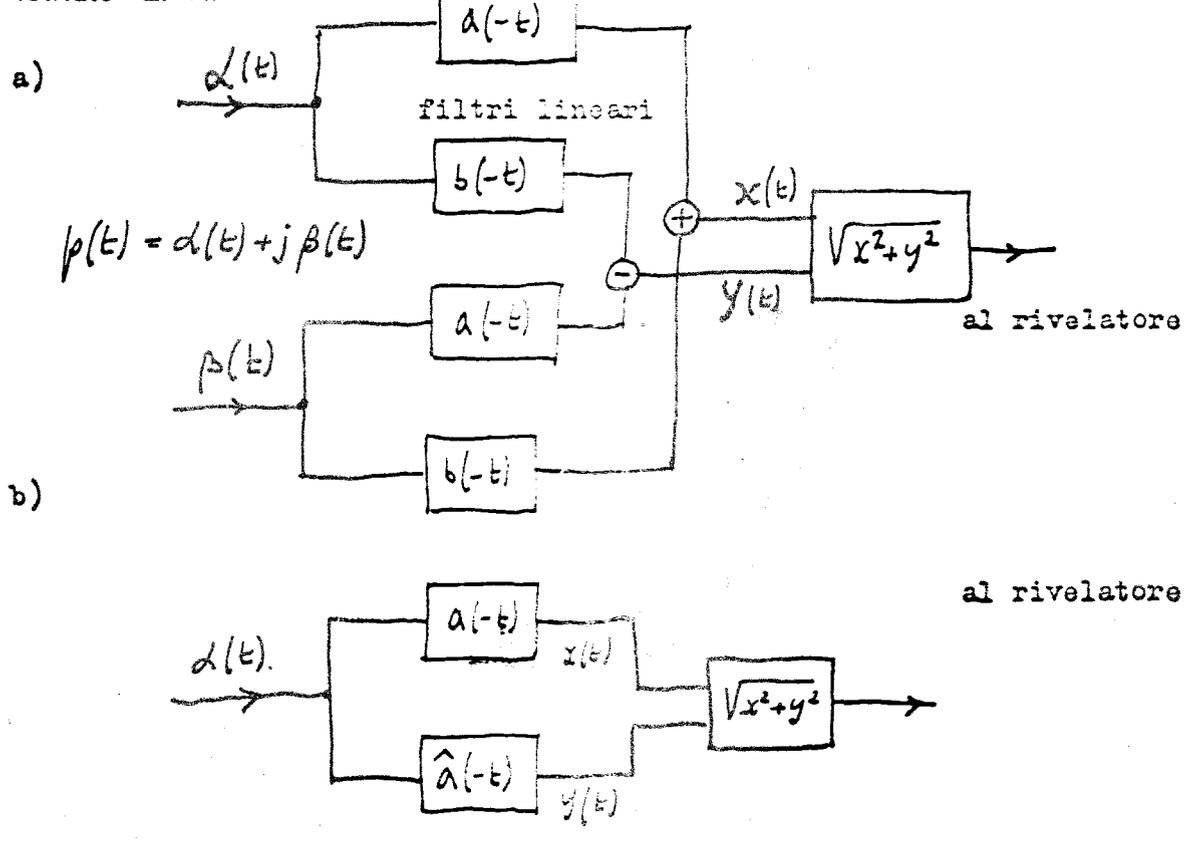


Fig. 67

h) Vediamo ora come si può realizzare un F.A. nel caso di segnali aventi prodotto $2WT \gg 1$.
 Si deve costruire l'integrale di correlazione (7-56). Se si considera di campionare entrambe le funzioni alla frequenza di campionatura f_c , la (7-56) può essere espressa agli istanti $t = t_i$, grazie alla (4-40), come :

$$y_s(t_i) = \int_0^T \lambda(z) \cdot \lambda(z - t_i + T) dz = \frac{1}{f_c} \cdot \sum_{n=0}^{K_0} \lambda\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot \lambda\left(\frac{n + K_0}{f_c}\right) \quad (7-74)$$

ove :

- $T = K_0 / f_c$ è la durata del segnale
- $z = n / f_c$ è la variabile di integrazione
- $t_i = \frac{n - K_0}{f_c}$

per $t \neq t_i$, si ha :

$$y_s(t) = \sum y_s(t_i) \cdot \frac{\sin \pi f_c (t - t_i)}{\pi f_c (t - t_i)} \quad (7-75)$$

.../...

La (7-74) suggerisce come una possibile soluzione realizzativa quella rappresentata in Fig. 68, ove si è fatto uso di una linea di ritardo, avente ritardo totale $T = K_0/f_c$.

Nell'esempio di Fig. 68 è $K_0 = 5$.

Le uscite dalla linea di ritardo sono K_0 e distanti tra loro $1/f_c$. Queste vengono moltiplicate rispettivamente per i K_0 campioni della risposta impulsiva $\delta(-t + T)$, in qualche forma memorizzata, ed i prodotti così ottenuti sommati tutti tra loro. Questo può ad esempio essere ottenuto collegando su ciascuna uscita una resistenza, di conduttanza proporzionale al valore del campione $\delta(t_i)$, e collegando poi assieme tutti gli altri capi delle resistenze. La tensione nel punto a comune è proporzionale ad $y_j(t_i)$, per $t = t_i$. La ricostruzione di $y_j(t)$ può poi essere ottenuta con un filtro passa basso, secondo la (7-75).

Se la linea di ritardo opera una continua traslazione nel tempo del segnale d'ingresso (linea di ritardo analogica), allora il campionatore di Fig. 68 può indifferentemente essere posto dopo il circuito somma, prima del filtro passa basso.

Quando la linea di ritardo sia del tipo digitale, nel qual caso il segnale è stato quantizzato in ampiezza ed in tempo, allora si dovrà necessariamente provvedere a ritardare direttamente i campioni, come in Fig. 68.

Dalla Fig. 68 segue che, se si invia un impulso $\delta(t)$ dalla uscita della linea di ritardo verso l'entrata, l'uscita comune delle resistenze sarà del tipo $\sum \delta(n/f_c)$, ovvero rappresenterà il segnale $\delta(t)$ campionato.

Il segnale all'uscita del filtro passa basso risulterà quindi proporzionale ad $\delta(t)$. In tal modo il sistema di Fig. 68 può anche essere usato come filtro generatore (od F.A.⁻¹).

segnale nella linea di ritardo
ai tempi

segnale di campione campionato

.../...

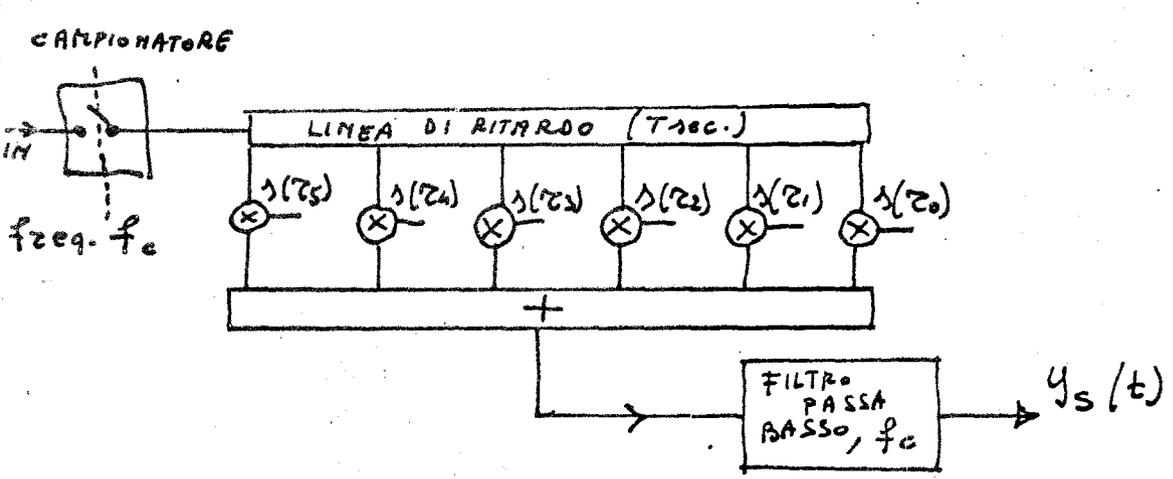
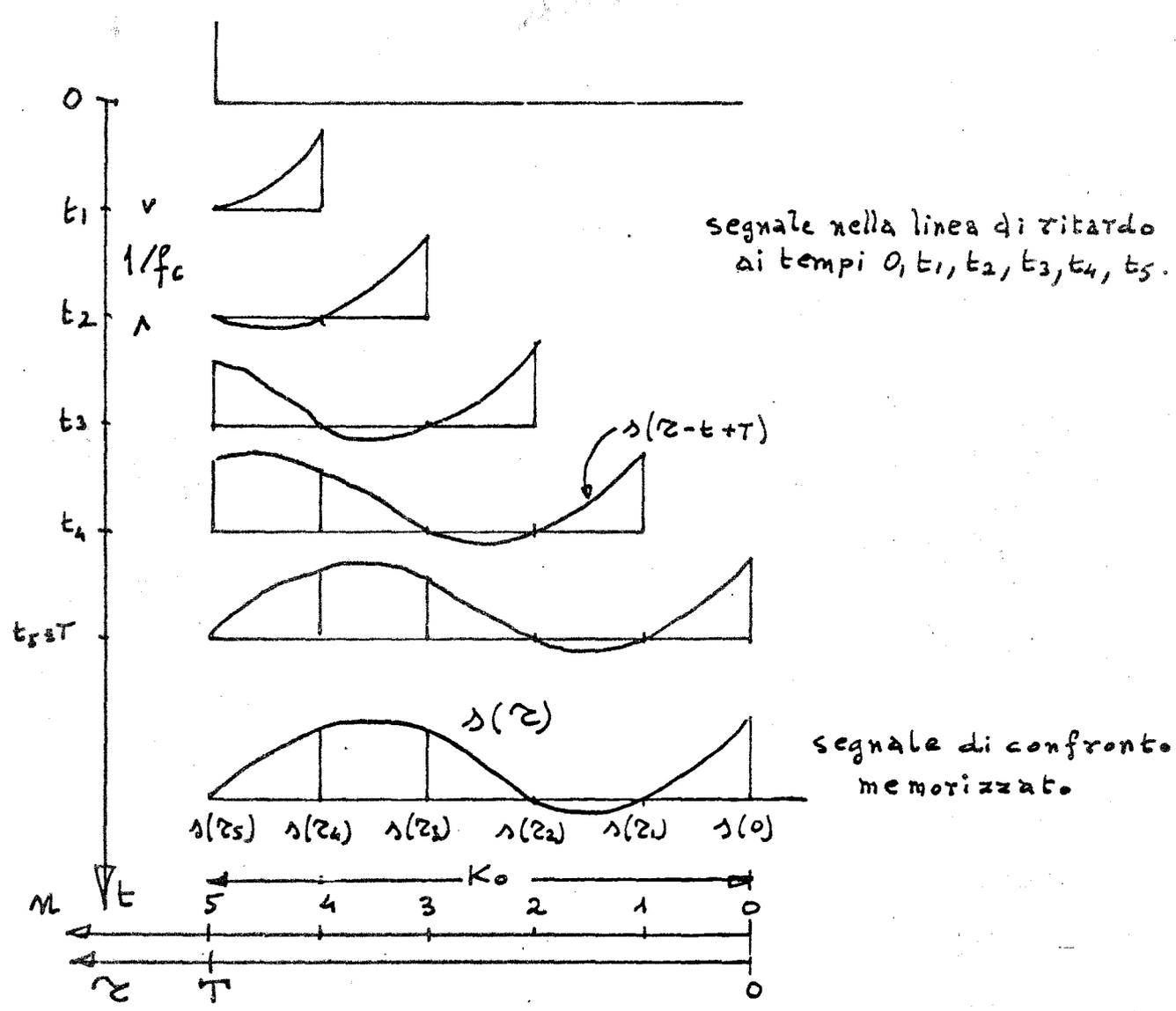
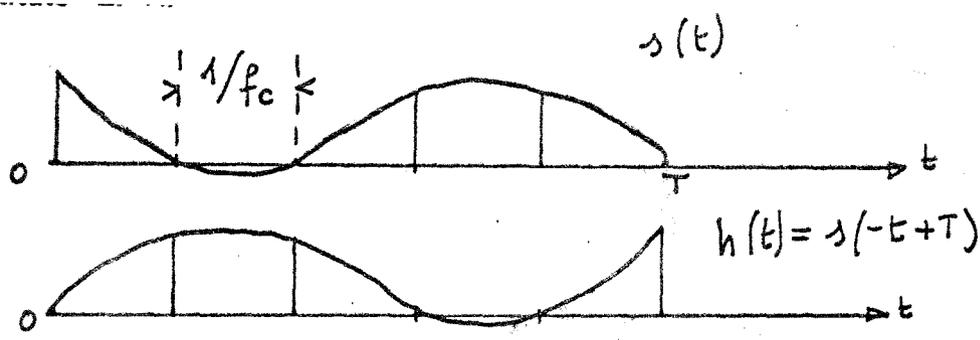


FIG. 68

campionatore
ingresso

Linea di ritardo

basso

Fig. 68

1) Vediamo ora alcune possibili soluzioni del filtro adattato nel caso di segnali a banda stretta. E' questo caso particolarmente interessante nel Sonar e nel Radar, essendo di tale tipo i segnali in questione.

Supponiamo di considerare un segnale contenuto nella banda $f_0 - W/2$, $f_0 + W/2$, e sia T la sua durata. Questo può genericamente essere espresso come :

$$s(t) = S(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad 0 \leq t \leq T \quad (7-76)$$

$$\begin{aligned} \text{ovvero : } s(t) &= S(t) \cdot \cos \varphi(t) \cdot \cos \omega_0 t - S(t) \cdot \sin \varphi(t) \cdot \sin \omega_0 t = \\ &= A(t) \cdot \cos \omega_0 t - B(t) \cdot \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Il filtro adattato al segnale $s(t)$ dovrà presentare risposta impulsiva $h(t) = s(-t)$. Dovendo realizzare tale F.A. secondo lo schema di Fig. 68, dovendo cioè campionare il segnale alla frequenza f_c , potrà interessare di ridurre il più possibile la frequenza f_c , questo apportando nel caso di sistemi digitali una proporzionale economia.

Dal teorema di campionatura in "fase e quadratura", visto in precedenza si ha che un segnale del tipo (7-76) può essere descritto mediante TW campioni complessi, presi alla frequenza $f_c = W$. Se la (7-76) è nota esattamente, allora gli istanti di campionatura t_i potranno essere scelti in modo che sia $\cos \omega_0 t_i = 1$ e $\sin \omega_0 t_i = 0$. Ne risulterà che saranno in tal caso necessari solamente TW campioni reali, rappresentanti il segnale $S(t) \cdot \cos \varphi(t)$. Lo schema di F.A. di Fig. 68 si applica allora direttamente a tale segnale campionato.

.../...

Nel caso del Sonar e del Radar la (7-76) è nota a meno di un termine di fase aleatorio φ_0 . Ovvero il segnale ricevuto è generalmente costituito da rumore $n(t)$ e da eventuali eco di ritorno della forma :

$$s'(t) = S(t-\theta) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t-\theta) + \varphi_0] = s(t-\theta) \quad (7-77)$$

ove θ è il ritardo tra emissione e ricezione, e φ_0 è la fase aleatoria, $\varphi_0 = \omega_0 \theta$

La (7-77) può inoltre considerarsi come parte reale del segnale analitico :

$$\begin{aligned} z'(t) &= s'(t) + j \hat{s}'(t) = S(t-\theta) \cdot [\cos \varphi(t-\theta) + j \sin \varphi(t-\theta)] \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t} = \\ &= m'(t-\theta) \cdot e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (7-78)$$

ove con $m'(t)$ si è indicato l'involuppo complesso.

Ricordiamo ora che ai fini della rivelazione del segnale (7-77) interessa l'involuppo della funzione di correlazione del segnale ricevuto con quello trasmesso. E, grazie al teorema del paragrafo 3-7, tale involuppo è uguale al modulo della funzione di correlazione calcolata tra il segnale analitico (7-78) e quello corrispondente trasmesso :

$$z(t) = s(t) + j \hat{s}(t) = m(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \quad (7-79)$$

ove $m'(t) = m(t) \cdot e^{j\varphi_0}$

Detta funzione di correlazione è quindi :

$$\begin{aligned} C_{z'z'}(\tau-\theta) &= \int m'(t-\theta) \cdot m'^*(t-\tau) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_0(t-\tau)} \cdot dt = \\ &= e^{j\omega_0 \tau} \cdot \int m'(t-\theta) \cdot m'^*(t-\tau) \cdot dt \end{aligned} \quad (7-80)$$

Se indichiamo ora con :

$$\begin{aligned} m(t) &= A(t) + j B(t) \\ m'(t) &= \alpha(t) + j \beta(t) \end{aligned} \quad (7-81)$$

La (7-80) può scriversi :

$$\begin{aligned} C_{z'z'}(\tau-\theta) &= e^{j\omega_0 \tau} \cdot \int [\alpha(t-\theta) + j \beta(t-\theta)] \cdot [A(t-\tau) - j B(t-\tau)] \cdot dt = \\ &= e^{j\omega_0 \tau} \cdot \left\{ [C_{\alpha A}(\tau-\theta) + C_{\beta B}(\tau-\theta)] + j [C_{\beta A}(\tau-\theta) - C_{\alpha B}(\tau-\theta)] \right\} = e^{j\omega_0 \tau} \cdot [\gamma(\tau-\theta) + j \lambda(\tau-\theta)] \dots \end{aligned} \quad (7-82)$$

Il modulo della (7-82) è quindi dato da $\sqrt{\gamma(z-\theta)^2 + \lambda(z-\theta)^2}$.
 È definitivamente è quindi sufficiente calcolare le quattro funzioni di correlazione elementari $C_{AA}, C_{AB}, C_{\beta\beta}, C_{\alpha\beta}$ e combinarle secondo la (7-82).
 Essendo poi i segnali α, β, A e B contenuti nella banda $-W/2, W/2$, è sufficiente campionarli alla frequenza $f_c = W$. Lo schema del correlatore è quello rappresentato in Fig. 67 - a), ove i segnali $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono stati ottenuti mediante demodulazione complessa del segnale reale (7-77).
 Ognuno dei 4 filtri adattati elementari di Fig. 67 - a) possono essere ottenuti secondo lo schema di Fig. 68, ove i segnali $A(t)$ e $B(t)$ siano stati in qualche modo memorizzati. Sarà inoltre possibile ridurre a due le linee di ritardo, una per i campioni di $\alpha(t)$ e l'altra per quelli di $\beta(t)$.
 Il numero totale di campioni complessi del segnale $\alpha(t) + j\beta(t)$, è WT ; ovvero ognuna delle due linee di ritardo contiene TW campionamenti.

Un'altra possibile soluzione è ottenibile nel seguente modo. Si ha dalla (7-73 bis):

$$C_{\alpha\alpha}(z-\theta) = \int [\alpha'(t) + j\hat{\alpha}'(t)] \cdot [\alpha(t-z) - j\hat{\alpha}(t-z)] dt =$$

$$= 2 C_{\alpha'\alpha'}(z-\theta) + j \cdot 2 C_{\alpha'\hat{\alpha}}(z-\theta) \quad (7-83)$$

Alla (7-83) è quindi applicabile lo schema di F.A. di Fig. 67 -b).
 Ognuna delle funzioni $C_{\alpha'\alpha'}$ e $C_{\alpha'\hat{\alpha}}$ potranno ottenersi mediante campioni delle rispettive funzioni presenti. Ai fini della riduzione della frequenza di campionatura i segnali analitici $\alpha(t)$ e $\hat{\alpha}(t)$ potranno pensarsi demodulati in modo che il loro spettro risulti centrato attorno alla frequenza W , e compreso tra la frequenza zero e W . I segnali così ottenuti saranno campionabili a frequenza $2W$. Lo schema realizzativo sarà quindi costituito da una sola linea di ritardo nella quale saranno contenuti $N = 2WT$ campioni del segnale $\alpha'(t)$, presi alla frequenza $2W$. Vi saranno poi memorizzati i due segnali $\alpha'(t)$ demodulato ed $\hat{\alpha}(t)$ demodulato.

I due sistemi suddetti sono schematicamente rappresentati rispettivamente in Fig. 69, a) e b).

