CAP.6 - SISTEMI NON LINEARI

6-0 - Introduzione

Un sistema non lineare (1) può generalmente essere definito come quel sistema per il quale la funzione d'uscita y(t) è una funzione generica dell'ingresso x(t), ovvero :

$$y(t) = g\left[x(t)\right] \tag{6-1}$$

Fondamentalmente il problema per un sistema non lineare si riduce ad una trasformazione di variabili.
Cioè, se sono note le densità di probabilità $p(x)$, $p(x_1, x_2)$, etc..., bisogna semplicemente trasformare le variabili per ottenere $p(y)$, $p(y_1, y_2)$, etc...

Si può fare uso delle seguenti espressioni :

$$E\left[f(y)\right] = \overline{f(y)} = \int f(y).p(y)dy = \int f\left[g(x)\right].p(x)dx \tag{6-2}$$

$$E\left[y_1 \cdot y_2\right] = \overline{y_1 \cdot y_2} = \iint y_1 \cdot y_2 \cdot p(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 =$$

$$= \iint g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot p(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \tag{6-3}$$

Vediamo ora di esaminare le caratteristiche di alcuni sistemi non lineari.

(1) Si fa qui esclusione dei sistemi non lineari che presentano isteresi.

.../...

6.1. - "Clippaggio" di rumore gaussiano a banda limitata.

Consideriamo di inviare rumore a banda stretta x(t) attraverso un "clipper" (squadratore) ideale, la cui caratteristica è rappresentata in Fig. 45, a).

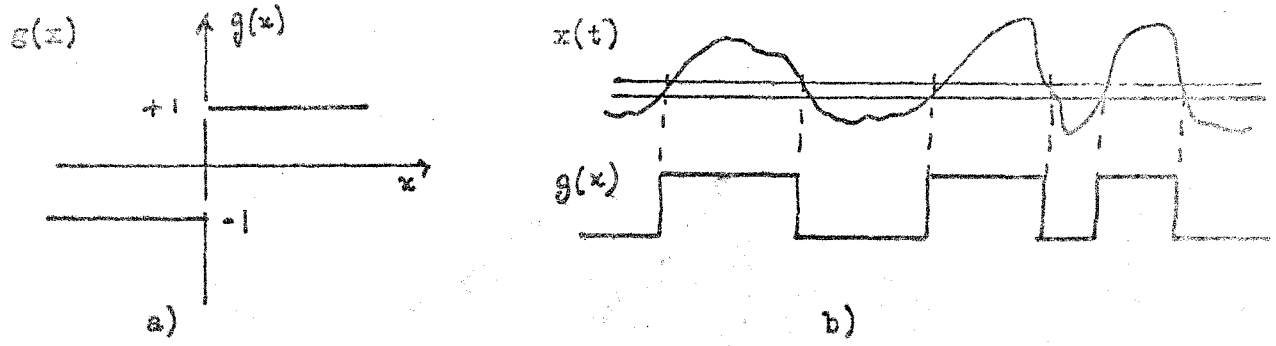


Fig. 45

Il segnale d'uscita y(t) sarà del tipo rappresentato in Fig. 45, b).
La densità di probabilità congiunta all'ingresso è data dalla (2-99), ovvero :

$$p(X_1, X_2, \tau) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2 \sqrt{1-c^2}} \cdot e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2 - 2c \cdot X_1 \cdot X_2}{2\sigma^2 (1-c^2)}} \qquad (6\text{-}4)$$

ove : $c(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)}$

La funzione di autocorrelazione dell'uscita $C_y(\tau)$ può calcolarsi introducendo la (6-4) nella (6-3). L'integrale può essere calcolato scrivendo la funzione da integrare in coordinate polari, sostituendo $X_1 = \tau \cdot \cos\theta$, $X_2 = \tau \cdot \sin\theta$. La funzione $g(X_1) \cdot g(X_2)$ risulterà allora uguale a +1 nel primo e terzo quadrante ed uguale a -1 nel secondo e quarto.

Integrando prima rispetto ad τ e poi rispetto a θ si ottiene :

$$C_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \text{arcosen}\, c(\tau) \qquad (6\text{-}5)$$

.../...

6.2. - Rivelatore quadratico.

Consideriamo il rivelatore quadratico di Fig. 46, ove è $y(t) = a[x(t)]^2$.

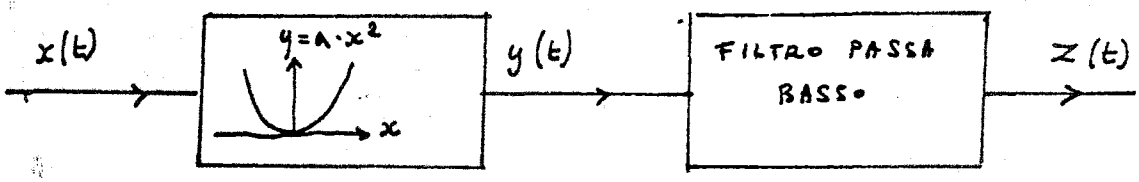


Fig. 46

Esaminiamo il comportamento del rivelatore quadratico quando all'ingresso viene inviato rumore gaussiano.
Sia :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (6\text{-}6)$$

la densità di probabilità del rumore gaussiano s(t).

La p(y) è data da :

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a y}\cdot\sigma}\cdot e^{-y/2\sigma^2} \quad , \text{ con } y \geq 0 \qquad (6\text{-}7)$$

Si ha :

$$\overline{y} = a\cdot\sigma^2 \, , \quad \overline{y^2} = 3\cdot\overline{y}^2 \, , \quad \sigma_y^2 = 2\cdot\overline{y}^2$$

Si consideri ora che il rumore sia a banda stretta, centrata attorno ad fo. Si può scrivere :

$$x(t) = S(t).\cos\left[\omega_o t + \varphi(t)\right] \qquad (6\text{-}8)$$

ove S(t) e $\varphi(t)$ variano lentamente rispetto ad $\omega_o \cdot t$.

Si può allora scrivere :

$$y(t) = \frac{a}{2}\cdot S^2(t) + \frac{a}{2}\cdot S^2(t)\cdot\cos 2\left[\omega_o\cdot t + \varphi(t)\right] \qquad (6\text{-}9)$$

.../...

Filtrando poi il secondo termine della (6-9) attorno alla frequenza 2fo, mediante il filtro passa basso di Fig. 46, si ha :

$$z(t) = \frac{a}{2} \cdot S^2(t) \qquad (6\text{-}10)$$

Sappiamo che è :

$$p(S) = \frac{S}{\sigma^2} \cdot e^{-S^2/2\sigma^2} \qquad \text{(Rayleigh)} \qquad (6\text{-}11)$$

da cui :

$$p(z) = \frac{1}{a \cdot \sigma^2} \cdot e^{-z/a\cdot\sigma^2} \qquad \text{per } z \geq 0 \qquad (6\text{-}12)$$

Si ha poi :

$$\overline{z} = a \cdot \sigma^2 ; \quad \overline{z^2} = 2\overline{z}^2 ; \quad \sigma_z^2 = \overline{z^2}$$

Dal confronto di σ_z^2 e σ_y^2 si vede che metà della potenza del rumore è stata filtrata dal filtro passa basso. Le funzioni p(x), p(y) e p(z) sono rappresentate in Fig. 47.

Per completare la descrizione delle proprietà di y(t) e z(t) si calcolano le loro funzioni di autocorrelazione e spettri di potenza. Sostituendo $g(x) = a \cdot x^2$ nella (6-3) e tenendo presente che x(t) è assunto gaussiano, si ha :

$$C_y(\tau) = \overline{y_1 \cdot y_2} = a^2 \cdot \overline{x_1^2 \cdot x_2^2} = a^2 \left[2 C_x^2(\tau) + C_x^2(0) \right] \qquad (6\text{-}13)$$

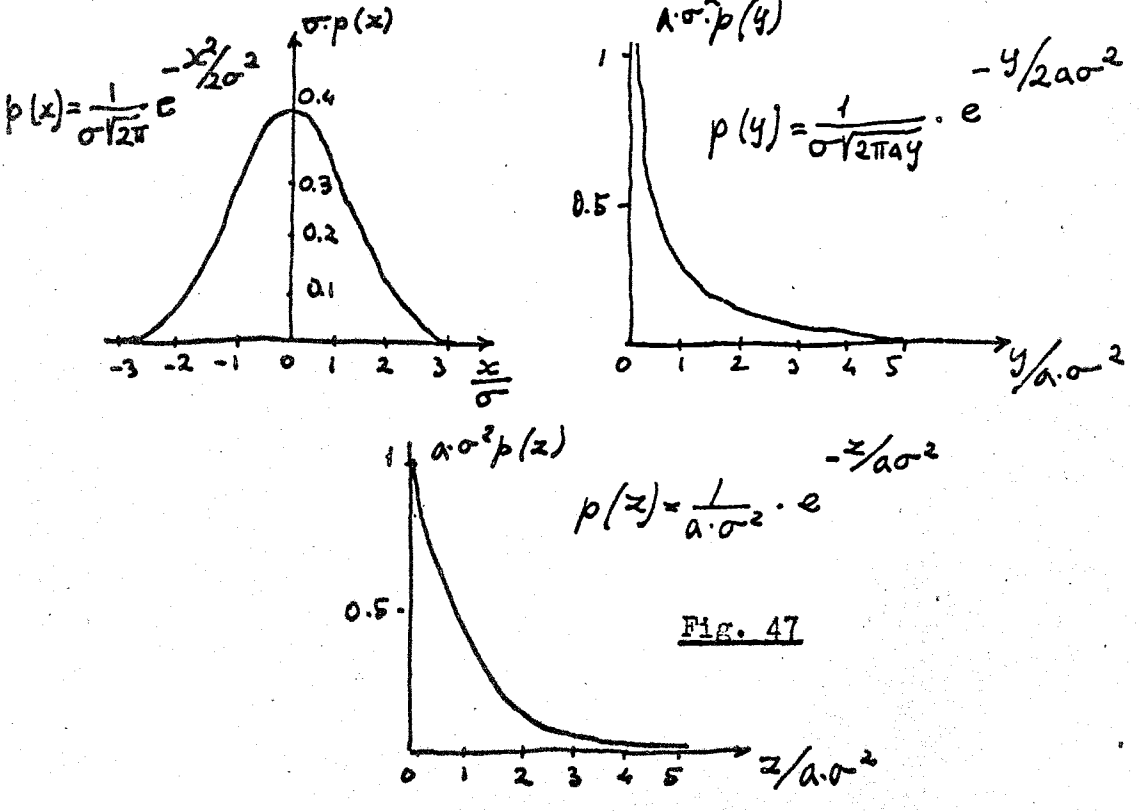


Fig. 47

.../...

Nella (6-13) si è fatto uso di una delle proprietà delle funzioni aleatorie gaussiane, simile ad una della (2-76), nel caso però di variabili non centrate. E' questa :

$$\overline{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4} = \overline{y_1 \cdot y_2} \cdot \overline{y_3 \cdot y_4} + \overline{y_1 \cdot y_3} \cdot \overline{y_2 \cdot y_4} + \overline{y_1 \cdot y_4} \cdot \overline{y_2 \cdot y_3} - 2\,\overline{y_1} \cdot \overline{y_2} \cdot \overline{y_3} \cdot \overline{y_4} \qquad (6\text{-}14)$$

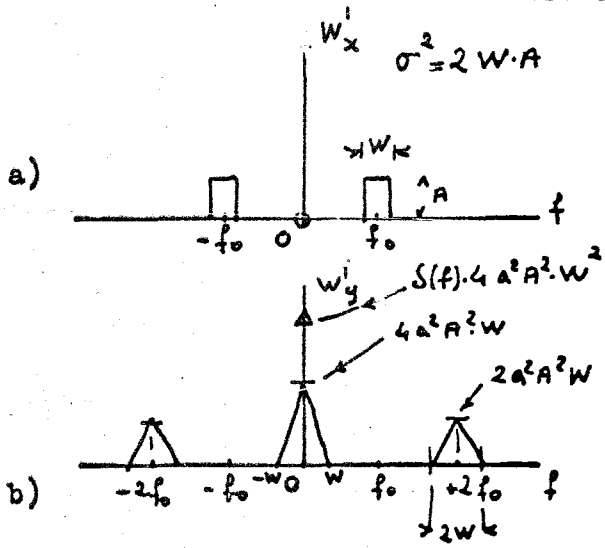
Trasformando poi la (6-13) si ottiene lo spettro di potenza di y(t). Il secondo termine è una costante, e quindi dà luogo ad una funzione δ ; il primo termine può trasformarsi mediante Parseval. Precisamente si ottiene :

$$W'_y(f) = 2a^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\tau) \cdot C_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau + a^2 \cdot \sigma^4 \cdot \delta(f) =$$

$$= 2 \cdot a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W'_x(f') \cdot W'_x(f - f') \cdot df' + a^2 \cdot \sigma^4 \cdot \delta(f) =$$

$$= 2a^2 \cdot \left[W'_x \otimes W'_x \right] + a^2 \sigma^4 \delta(f) \qquad (6\text{-}15)$$

che è genericamente valida per <u>rumore gaussiano</u>.



- Fig. 48 -

La applicazione della (6-15) per rumore gaussiano a banda **stretta** è mostrata in Fig. 48.
Il filtraggio dello **spettro** W'_y mediante il filtro passa **basso** dà luogo alla W'_z , e lascia solamente **la parte** triangolare attorno alla frequenza **zero**.
Se il rivelatore **quadratico** opera con **la legge** $y = bx + ax^2$, **allo** spettro di Fig. 48, b) si **dovrà aggiungere** quello **di** Fig. 48, a).
Se $f_0 \gg W$, **il filtraggio** passa basso lascierà ancora **solamente** la componente triangolare centrale, $W'_z(f)$.
La funzione $C_z(\tau)$ è **in questo** caso di rumore a banda **stretta**, **del** tipo $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
Precisamente :

$$C_z(\tau) = a^2 \cdot \sigma^4 \cdot \left(\frac{\sin \pi W t}{\pi W t}\right)^2 + a^2 \cdot \sigma^4 \qquad (6\text{-}16)$$

.../...

Le considerazioni precedenti non sono più completamente valide quando l'ingresso $x(t)$ consiste di rumore + segnale, a meno che anche il segnale non sia rappresentabile da una funzione aleatoria gaussiana.

Consideriamo ora il caso in cui il <u>segnale è sinusoidale</u>, $s(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, e sia il rumore gaussiano centrato. Si ha allora :

$$y(t) = a \cdot x(t)^2 = a \left[s(t) + n(t) \right]^2 \qquad (6\text{-}17)$$

Si vuole calcolare $W'_y(f)$.

La funzione di <u>autocorrelazione</u> di $y(t)$ è data da :

$$C_y(\tau) = a^2 \overline{(s_1+n_1)^2 \cdot (s_2+n_2)^2} = a^2 \Big(\overline{s_1^2 \cdot s_2^2} + \overline{s_1^2 n_2^2} + 4\,\overline{s_1 s_2 n_1 n_2} + \overline{s_2^2 n_1^2} + \overline{n_1^2 \cdot n_2^2} + 2\,\overline{s_1^2 s_2 n_2} + 2 \cdot \overline{s_1 s_2^2 n_1} + 2\,\overline{s_1 n_1 n_2^2} + 2\,\overline{s_1 n_1^2 n_2} \Big)$$

(6-18)

ove si è scritto :

$s_1 = s(t)$; $n_1 = n(t)$

$s_2 = s(t-\tau)$; $n_2 = n(t-\tau)$

Gli ultimi quattro termini della (6-18) sono nulli, come può mostrarsi scomponendoli grazie alla indipendenza statistica tra s ed n , e considerando che sia s che n sono centrate. La $C_y(\tau)$ può allora scriversi :

$$C_y(\tau) = C_{s\times s}(\tau) + C_{s\times n}(\tau) + C_{n\times n}(\tau) \qquad (6\text{-}19)$$

ove :

$$C_{s\times s}(\tau) = a^2 \cdot \overline{s_1^2 \cdot s_2^2}$$

$$C_{s\times n}(\tau) = 4a^2 C_s(\tau) \cdot C_n(\tau) + 2a^2 C_s(0) \cdot C_n(0)$$

$$C_{n\times n}(\tau) = a^2 \overline{n_1^2 \cdot n_2^2} = a^2 \left[2C_n^2(\tau) + C_n^2(0) \right]$$

(6-20)

.../...

Trasformando la (6-19) si ottiene :

$$W'_y(f) = W'_{s\times s}(f) + W'_{s\times m}(f) + W'_{m\times m}(f) \qquad (6\text{-}21)$$

Essendo per ipotesi il rumore gaussiano la $W'_{m\times m}(f)$ è esprimibile mediante la (6-15).

La $W'_{s\times m}(f)$ può poi essere messa nella forma :

$$W'_{s\times m}(f) = 4\cdot a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_s(\tau)\cdot C_m(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau + 2a^2 C_s(0)\cdot C_m(0)\cdot \delta(f) =$$

$$= 4\cdot a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W'_m(f')\cdot W'_s(f-f')\,df' + 2a^2 C_s(0)\cdot C_m(0)\cdot \delta(f) =$$

$$= 4\cdot a^2 \left[W'_m \otimes W'_s \right] + 2a^2\cdot C_s(0)\cdot C_m(0)\cdot \delta(f) \qquad (6\text{-}22)$$

Si ha poi :

$$C_s(\tau) = \frac{c^2}{2}\cdot \cos\omega_0\tau \; ; \quad W'_s(f) = \frac{c^2}{4}\left[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right] ;$$

$$C_{s\times s}(\tau) = a^2 c^4 \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\cos 2\omega_0\tau\right) ;$$

$$\Downarrow\Uparrow$$

$$W'_{s\times s}(f) = \frac{a^2 c^4}{4}\cdot\delta(f) + \frac{a^2 c^4}{16}\left[\delta(f+2f_0)+\delta(f-2f_0)\right] \qquad (6\text{-}23)$$

Si ottiene perciò dalla (6-22), sostituendo $W'_s(f)$:

$$W'_{s\times m}(f) = a^2\cdot c^2\left[W'_m(f+f_0)+W'_m(f-f_0)\right] + a^2 c^2\sigma^2\cdot\delta(f) \qquad (6\text{-}24)$$

In definitiva, $W'_y(f)$ è dato alla somma delle espressioni (6-23), (6-24) e (6-15).
Considerando ora il rumore a banda stretta, di larghezza W, attorno ad f_0 , Fig. 49, a), lo spettro di potenza $W'_y(f)$ ha l'andamento di Fig. 49, b).
Si noti che lo spettro è costituito dallo spettro del rumore $W'_{m\times m}(f)$, già rappresentato in Fig. 48, al quale sono stati sommati i tre spettri rettangolari (tratteggiati in figura), più le componenti concentrate alla

.../...

frequenza $-2f_0$, 0 e $2f_0$.

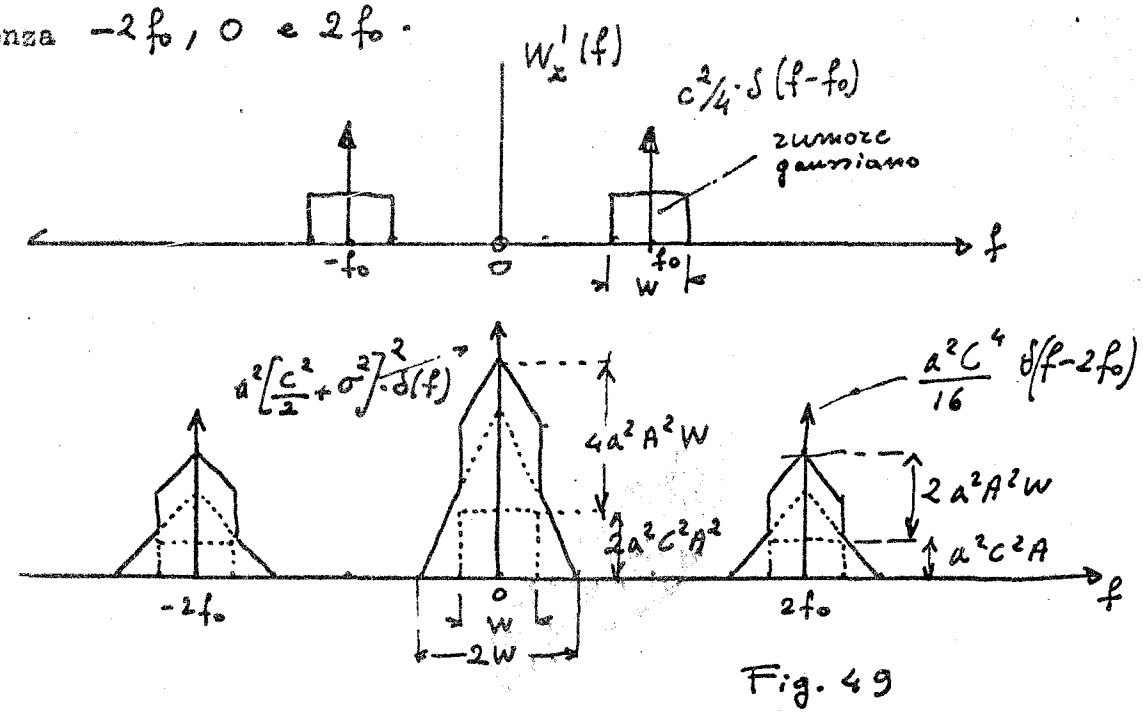


Fig. 49

Se si considera ora solo le componenti dello spettro comprese tra $-W$ e W, ovvero se si considera il segnale z(t) ottenuto filtrando y(t), allora la potenza della fluttuazione in z(t) è data da $2a^2AW(c^2+2AW)$, ove $2AW$ è la potenza di rumore d'ingresso.

.../...

6-3. - Rettificatore a semionda.

Consideriamo ora un'altro sistema non lineare, la cui uscita è del tipo $y(t)\begin{cases} = b\cdot x(t), & \text{per } x>0, \text{ Fig. 50, a).} \\ = 0 \quad , & \text{per } x<0 \end{cases}$

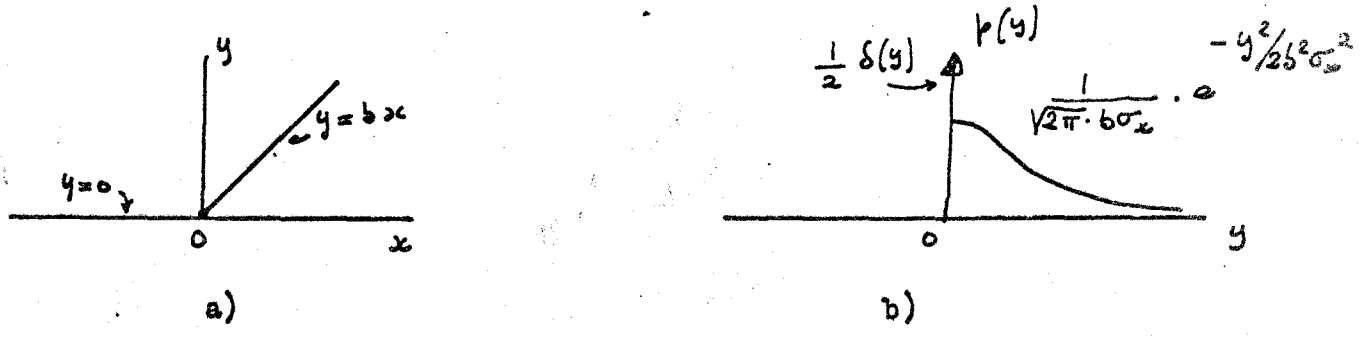


Fig. 50

Consideriamo il caso in cui x(t) sia un rumore gaussiano. La p(y) assume allora la forma di Fig. 50, b).

Si ha poi :

$$\overline{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot p(y)\cdot dy = \int_{0}^{+\infty} b\cdot x\cdot p(x)\,dx = \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma_x \qquad (6\text{-}25)$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2}\,b^2\,\sigma_x^{\,2}\,; \quad \sigma_y^{\,2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}\right) b^2\,\sigma_x^{\,2} \qquad (6\text{-}26)$$

Calcoliamo ora $C_y(\tau)$. Questa può scriversi :

$$C_y(\tau) = b^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x_1\cdot x_2\, p(x_1, x_2\,;\tau)\cdot dx_1\cdot dx_2 \qquad (6\text{-}27)$$

ove $p(x_1, x_2; \tau)$ è espressa dalla (2-99).

L'integrale può essere calcolato sostituendo le coordinate polari $x_1 = \tau\cdot\cos\vartheta$, $x_2 = \tau\cdot\sin\vartheta$, ed integrando prima rispetto ad τ e poi rispetto a ϑ . Si ottiene :

$$C_y(\tau) = \frac{b^2\,\sigma_x^{\,2}}{2\pi}\cdot\left(\sqrt{1-c^2(\tau)} + c(\tau)\cdot\left\{\pi - \cos^{-1}\left[c(\tau)\right]\right\}\right) \qquad (6\text{-}28)$$

ove è

$$c(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^{\,2}}$$

.../...

Sviluppando la funzione $\cos^{-1}$, si ottiene con approssimazione :

$$C_y(\tau) \cong \frac{b^2 \cdot \sigma_x^2}{2\pi} + \frac{b^2}{4} C_x(\tau) + \frac{b^2}{4\pi\sigma_x^2} \cdot C_x^2(\tau) + \frac{b^2}{48\pi\sigma_x^6} \cdot C_x^4(\tau) \qquad (6\text{-}29)$$

Considerando la trasformata dei soli primi tre termini si ottiene :

$$W'_y(f) = \frac{b^2 \cdot \sigma_x^2}{2\pi} \cdot \delta(f) + \frac{b^2}{4} W'_x(f) + \frac{b^2}{4\pi\sigma_x^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} W'_x(f') \cdot W'_x(f-f') \cdot df' \qquad (6\text{-}30)$$

Questa è rappresentata in Fig. 51, b), nel caso di rumore gaussiano a banda stretta (Fig. 51, a)).

Il quarto termine della (6-29) dà luogo nella trasformata ad un termine, rappresentato tratteggiato nella Fig. 51, b), descrivibile come ottenuto dalla convoluzione dell'ultimo termine della (6-30) con se stesso.

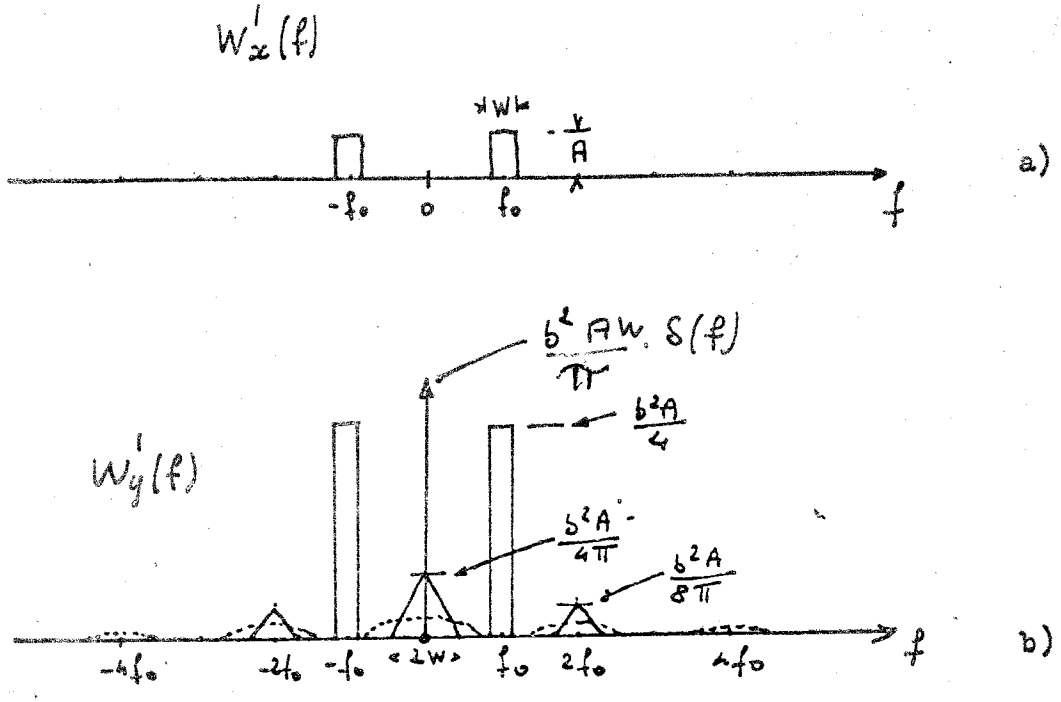


Fig. 51