

Cap. 4 - Limitazione delle funzioni nei domini del tempo e della frequenza.

4-0 Introduzione

Nella precedente trattazione non si sono imposti limiti alla estensione delle funzioni nel tempo e nella frequenza.

Nella realtà, le funzioni presentano una durata finita od una banda di frequenze finite, oppure in taluni casi, in una pratica approssimazione, durata e banda finite.

La imposizione di uno dei suddetti limiti comporta la riduzione dei gradi di libertà della funzione, la quale può ora essere rappresentata da un insieme di valori discreti. Ovvero la limitazione della funzione in uno dei due domini, tempo o frequenza, offre la possibilità di descrivere la funzione nell'altra dominio mediante campioni della funzione, presi in modo opportuno. La interpolazione continua tra detti campioni onde ricostruire la funzione originale è possibile, e si ottiene mediante una opportuna funzione di composizione. Tale proprietà dei segnali limitati verrà dimostrata nei seguenti paragrafi, che riguardano appunto i teoremi di campionatura.

4-1 Funzioni di durata finita - Campionatura dello spettro.

Sia la funzione $s(t)$ limitata nell'intervallo $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$, ed ammetta trasformata di Fourier $S(f)$. Quest'ultima potrà allora essere descritta mediante campioni presi alla distanza $1/T$.

La dimostrazione di questo teorema è la stessa della dimostrazione della proprietà riportata al paragrafo 1-5, d), ovvero :

$$\text{rep}_T s(t) \iff \frac{1}{T} \text{comb}_{\frac{1}{T}} S(f) \quad (4-1)$$

Si ha infatti :

$$s(t) \iff S(f) \quad (4-2)$$

$$\sum_n \delta(t-nT) \iff \frac{1}{T} \sum_n \delta(f - \frac{n}{T}) \quad (4-3)$$

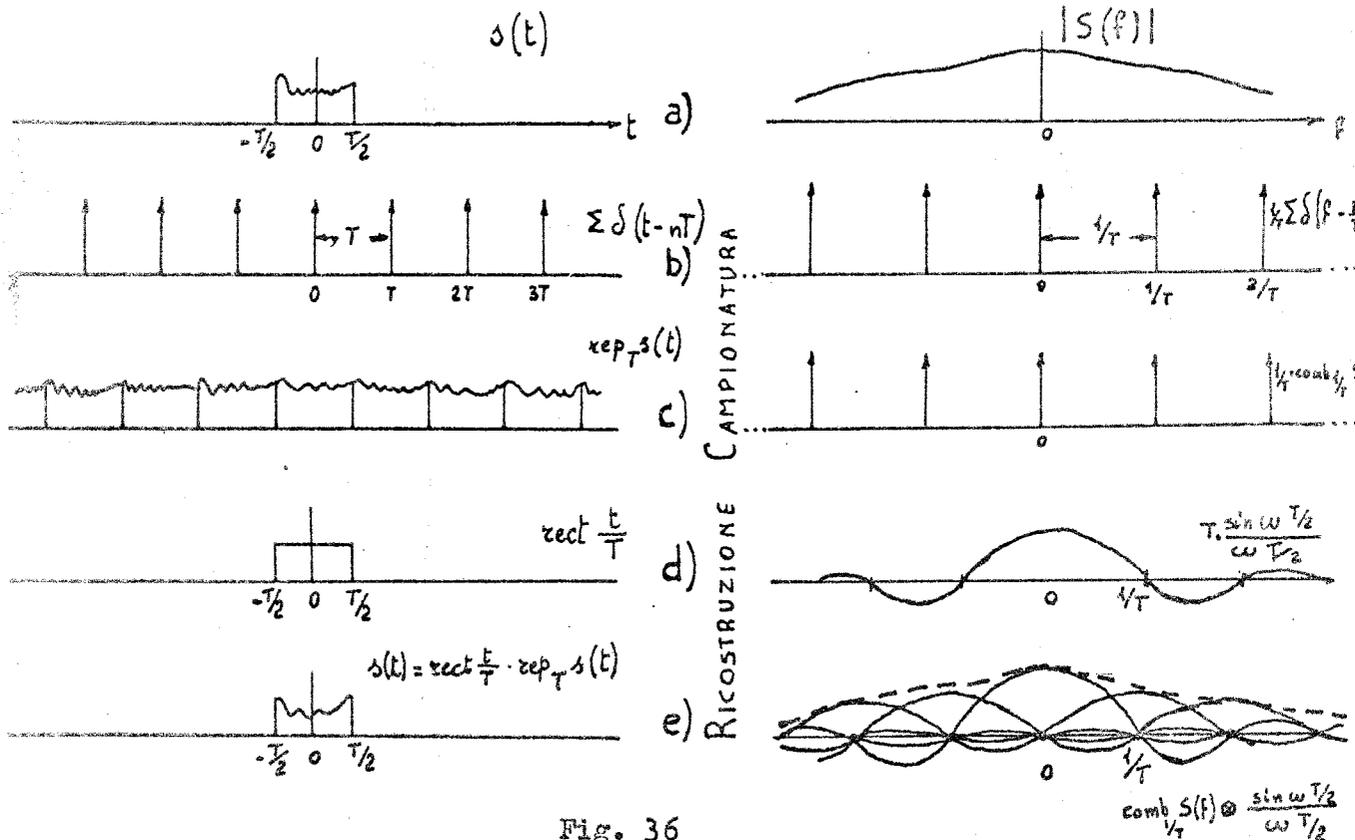
$$\left. \begin{aligned} s(t) \otimes \sum_n \delta(t-nT) &= \\ = \sum_n s(t) \otimes \delta(t-nT) &= \\ = \sum_n s(t-nT) = \text{rep}_T s(t) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{T} S(f) \cdot \sum_n \delta(f - \frac{n}{T}) &= \\ = \frac{1}{T} \sum_n S(f) \cdot \delta(f - \frac{n}{T}) &= \\ = \frac{1}{T} \sum_n S(\frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \text{comb}_{\frac{1}{T}} S(f) \end{aligned} \right.$$

(4-4)

.../...

Le coppie di funzioni (4-2), (4-3) e (4-4) sono rappresentate rispettivamente in Fig. 36, a), b) e c).

Il primo membro della trasformazione (4-4) è ottenuto operando la convoluzione dei primi membri delle trasformazioni (4-2) e (4-3). Il secondo membro della trasformazione (4-4) è conseguentemente ottenuto dal prodotto dei secondi membri delle (4-2) e (4-3).



Si noti che i campioni $\frac{1}{T} S\left(\frac{n}{T}\right)$ sono uguali ai coefficienti.

dello sviluppo in serie di Fourier. La funzione $rep_T s(t)$ è infatti per definizione una funzione periodica, ed i coefficienti D_m del suo sviluppo in serie sono dati da :

$$D_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} rep_T s(t) \cdot e^{-jm \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-jm \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T} \left[S(f) \right]_{f = \frac{m}{T}} = \frac{1}{T} S\left(\frac{m}{T}\right)$$

(4-5)

.../...

La ricostruzione della funzione $s(t)$ dalla $\text{rep}_T s(t)$ avviene moltiplicando quest'ultima per la funzione $\text{rect } t/T$; ciò equivale nel dominio della frequenza ad operare la convoluzione tra le loro trasformate; ovvero:

$$s(t) = \text{rect } \frac{t}{T} \cdot \text{rep}_T s(t) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{T} \text{comb}_T S(f) \otimes \frac{\sin \omega T/2 \cdot T}{\omega T/2} = S(f) \quad (4-6)$$

Si ha poi, sviluppando il secondo membro della trasformazione (4-6):

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{T} \cdot \text{comb}_T S(f) \otimes T \cdot \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = \\ &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} S(\eta) \cdot \delta\left(\eta - \frac{n}{T}\right) \cdot \frac{\sin(\omega - 2\pi\eta) \cdot T/2}{(\omega - 2\pi\eta) \cdot T/2} \cdot d\eta = \\ &= \sum_n S\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \frac{\sin\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \cdot T/2}{\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) \cdot T/2} = \sum_n S\left(\frac{n}{T}\right) \cdot C_1\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

(4-7)

La (4-7) è detta formula di interpolazione. Essa permette infatti di interpolare i valori dei campioni onde ricostruire la funzione $S(f)$. La $C_1(f - n/T)$ è detta funzione di composizione. La operazione di interpolazione è rappresentata in Fig. 36, d) ed e). Si noti che la funzione $C_1(f - n/T)$ relativa al campione $S(n/T)$ si annulla in corrispondenza di tutti gli altri campioni.

I valori assunti dei vari campioni sono genericamente indipendenti tra loro. Se indichiamo ora con Θ l'intervallo di ripetizione di $s(t)$, se è $\Theta > T$, (Fig. 37, a) e b)), allora l'intervallo di campionatura diventerebbe pari ad $1/\Theta < 1/T$. I campioni adiacenti non sarebbero più completamente indipendenti. La $S(f)$ sarebbe però ancora completamente determinata da tali campioni, e ricostruibile da questi tramite la funzione:

$$C_{1\Theta}\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{\sin\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Theta}\right) \cdot \tau/2}{\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Theta}\right) \cdot \tau/2} \cdot \Theta^{-1} \cdot \tau \quad (4-8)$$

ove τ è la durata della funzione rettangolare $\text{rect } \frac{t}{\tau}$, (ove τ è un qualsiasi valore compreso tra T e Θ). (Fig. 37, c)).

.../...

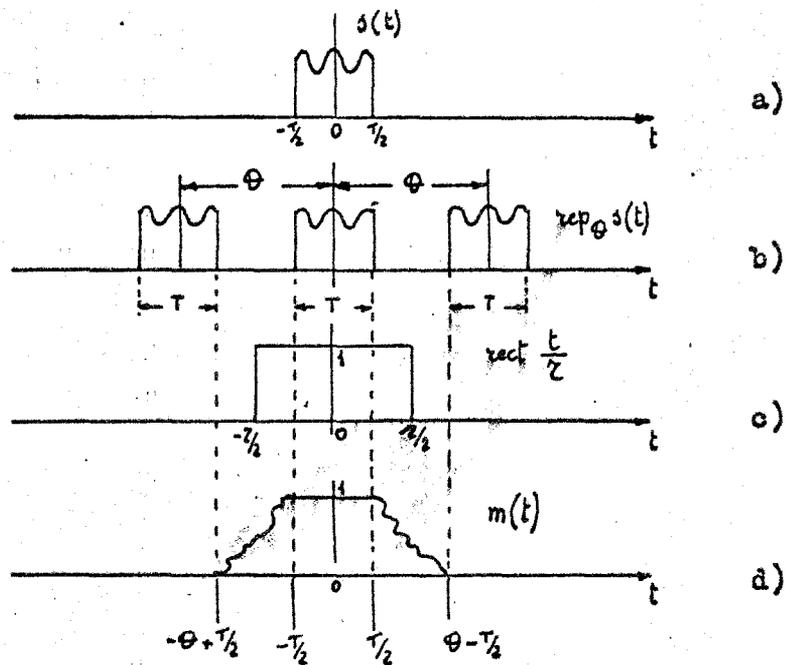


Fig. 37

Più genericamente, nel caso in cui è $\Theta > T$, la funzione $s(t)$ può pensarsi ottenuta dalla relazione :

$$s(t) = \text{rep}_{\Theta} s(t) \cdot m(t) \quad (4-9)$$

ove $m(t)$ è una qualsiasi funzione rappresentata in Fig. 37, d), che soddisfa alle sole condizioni :

$$\begin{aligned} m(t) &= 1 & |t| &\leq T/2 \\ &= 0 & |t| &\geq \Theta - T/2 \end{aligned} \quad (4-10)$$

La $m(t)$ può avere un andamento qualsiasi negli intervalli $T/2 \div \Theta - T/2$, $-T/2 \div -\Theta + T/2$.

In tal caso l'integrale di convoluzione tra la $\frac{1}{T} \text{comb}_{T} S(f)$ e la trasformata di $m(t)$ perde ogni valore rappresentativo, ma sussiste la validità del suo risultato, assicurato dalla (4-9).

Si noti infine che se si facesse $\Theta < T$, allora si avrebbe sovrapposizione tra le funzioni $s(t)$ ripetute, e non sarebbe più possibile ricostruire la $s(t)$ mediante una operazione del tipo (4-9).

Funzioni contenute in una banda di frequenze limitata - W, W
Campionatura della funzione del tempo.

Sia lo spettro di Fourier $S(f)$ della funzione $s(t)$ limitato nella banda di frequenze $-W, W$.

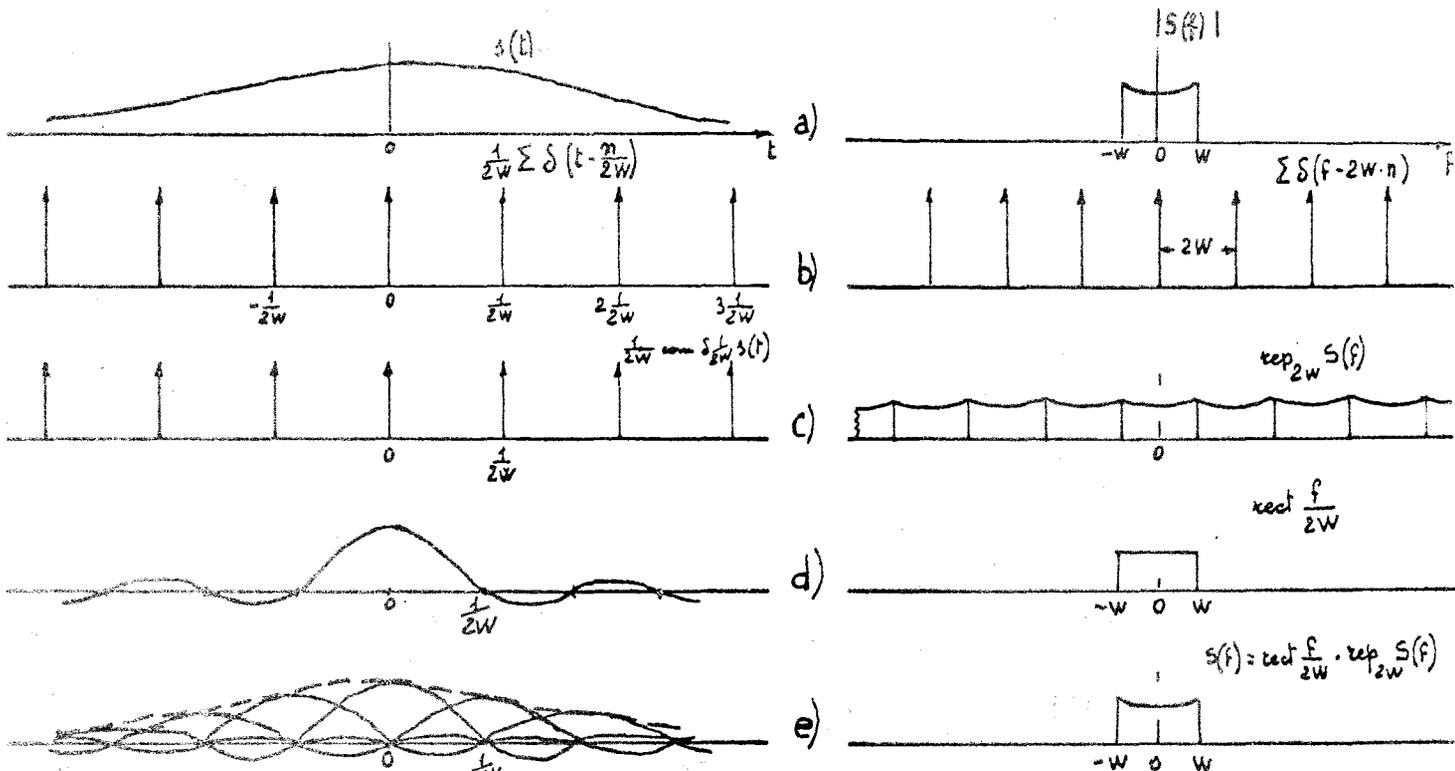
Lo stesso procedimento seguito nel paragrafo precedente potrà essere applicato a questo caso, ove ci si riferisca ora al dominio coniugato. Si ha infatti :

$$\frac{1}{2W} \sum_n s\left(t - \frac{n}{2W}\right) \iff s(t) \quad (4-11)$$

$$\iff \sum_n \delta(f - 2W \cdot n) \quad (4-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2W} \sum_n s(t) \cdot \delta\left(t - \frac{n}{2W}\right) = \\ = \frac{1}{2W} \sum_n s\left(\frac{n}{2W}\right) = \frac{1}{2W} \text{comb}_{\frac{1}{2W}} s(t) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \sum_n S(f) \otimes \delta(f - 2W \cdot n) = \\ = \sum_n S(f - 2W \cdot n) = \text{rep}_{2W} S(f) \end{aligned} \right. \quad (4-13)$$

La (4-13) mostra quindi che la funzione $s(t)$ può essere descritta mediante campioni presi alla distanza $1/2W$. Quindi $2W$ è la minima frequenza di campionatura di un segnale, il cui spettro è contenuto nella banda $-W, W$.



$s(t) = \text{comb}_{\frac{1}{2W}} s(t) \otimes \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t}$ **Fig. 38**

.../...

Le coppie di funzioni (4-11), (4-12) e (4-13) sono rispettivamente rappresentate in Fig. 38, a), b) e c). La ricostruzione della funzione $s(t)$ viene ancora ottenuta moltiplicando lo spettro $\text{zep}_{2w} S(f)$ per la funzione $\text{rect } f/2w$, (Fig. 38, d) ed e)).

Si ottiene infatti :

$$s(t) = \frac{1}{2w} \text{comb}_{\frac{1}{2w}} \delta(t) \otimes \frac{\sin 2\pi w t}{2\pi w t} \cdot 2w \iff \text{rect } \frac{f}{2w} \cdot \text{zep}_{2w} S(f) = S(f) \quad (4-14)$$

Sviluppando ora il primo membro della trasformazione (4-14) si ottiene :

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{comb}_{\frac{1}{2w}} \delta(t) \otimes \frac{\sin 2\pi w t}{2\pi w t} = \sum_n \delta\left(\frac{n}{2w}\right) \cdot \frac{\sin(2\pi w t - n\pi)}{2\pi w t - n\pi} = \\ &= \sum_n \delta\left(\frac{n}{2w}\right) \cdot g\left(t - \frac{n}{2w}\right) \end{aligned} \quad (4-15)$$

Similmente alla (4-7), la (4-15) opera l'interpolazione tra i campioni di $s(t)$. La funzione $g(t)$ è la funzione di composizione. Se i campioni $s(n/2w)$ vengono inviati in un filtro passa basso di risposta impulsiva $2w \cdot g(t)$, allora il segnale d'uscita del filtro, dato dalla convoluzione del segnale d'ingresso con la risposta impulsiva, è rappresentato dalla (4-15), ovvero è uguale alla $s(t)$.

La risposta in frequenza di questo filtro è la funzione $\text{rect } \frac{f}{2w}$, che è di difficile realizzazione pratica.

Similmente al caso del paragrafo precedente, si può qui pensare di scegliere una frequenza di campionatura $f_c > 2w$. Ciò corrisponde ad allontanare tra loro i termini della funzione $\text{zep}_{f_c} S(f)$.

Si può perciò pensare anche qui di fare uso di un filtro, che risulterà di più facile realizzazione, tale che la sua risposta alla frequenza $M(f)$ soddisfi alle condizioni :

$$\begin{aligned} M(f) &= 1 && \text{per } |f| \leq w \\ &= 0 && \text{per } |f| \geq f_c - w \\ &= \text{qualsunque per } \begin{cases} w \leq f \leq f_c - w \\ -w \leq f \leq -f_c + w \end{cases} \end{aligned} \quad (4-16)$$

Sarà allora :

$$S(f) = \text{zep}_{f_c} S(f) \cdot M(f) \quad (4-17)$$

In tal caso la $g(t)$ è la trasformata inversa di $\frac{1}{2w} M(f)$, che non è necessariamente una funzione elementare.

.../...

a) Campionatura in fase. (DA BIBL. N° 8)

Nel paragrafo precedente si è considerato il caso di un segnale $s(t)$, il cui spettro era compreso tra $-W$ e W . (Fig. 39, a)).

Consideriamo ora il caso in cui lo spettro occupa una banda W attorno ad una portante f_0 . (Fig. 39, b)).

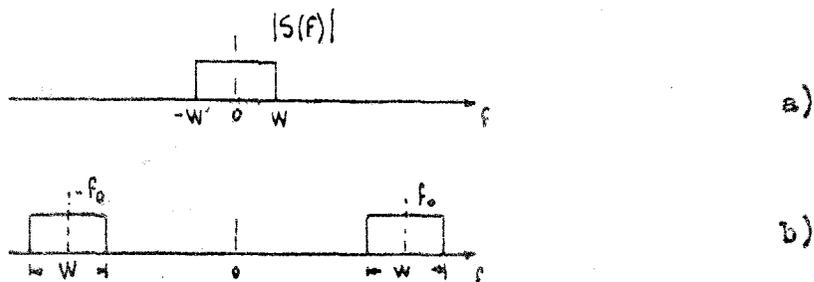


Fig. 39

Il caso a) di Fig. 39 può considerarsi come il caso limite del b), quando $f_0 = W/2$.

Volendo ora formulare un teorema di campionatura per il segnale b), si potrebbe pensare di procedere come nel paragrafo precedente. Ovvero, ripetere lo spettro con intervallo f_c , il che corrisponde alla campionatura della funzione $s(t)$, e poi apporre, in fase di ricostruzione del segnale, una funzione "finestra" sullo spettro, che ripristini lo spettro iniziale. In questo caso però non è così evidente come assicurarsi che f_c sia scelto in modo che gli spettri ripetuti non si sovrappongano; infatti l'operazione $\sum_{m=-\infty}^{\infty} S(f - mf_c)$ va intesa nel senso di spostare rigidamente lo spettro completo (parte a frequenza positiva e negativa) sia verso destra che verso sinistra, ad intervalli f_c . Pertanto la parte ripetuta di spettro a frequenza negativa potrebbe sovrapporsi con la parte originale a frequenza positiva, e viceversa.

Sarà quindi necessario stabilire f_c in modo che tale sovrapposizione non abbia luogo. Detto m il numero di ripetizioni dello spettro a frequenza negativa che lo porta il più vicino sulla sinistra della parte positiva originale la condizione per f_c di non sovrapposizione degli spettri si scrive: (Fig. 40).

$$[m \cdot f_c - f_0] + \frac{W}{2} < f_0 - \frac{W}{2}$$

$$[(m+1) f_c - f_0] - \frac{W}{2} \geq f_0 + \frac{W}{2}$$

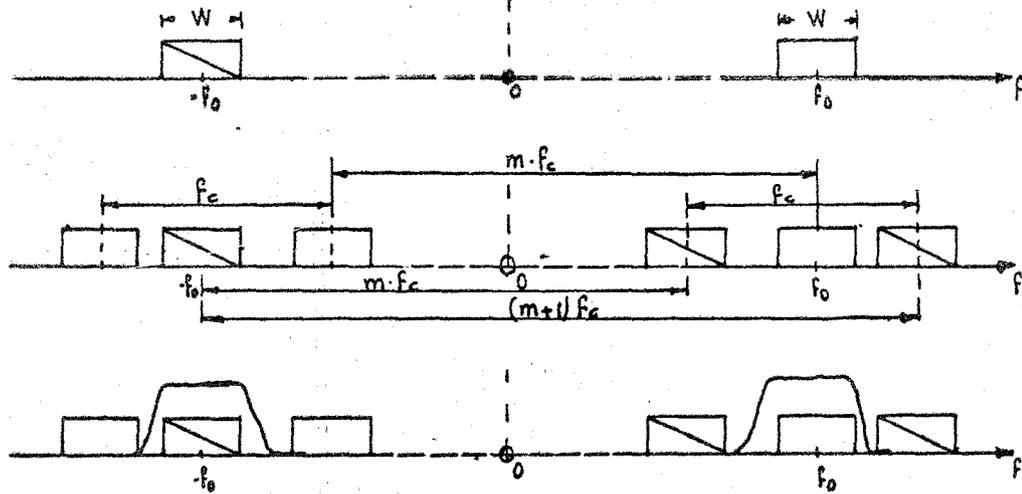


Fig. 40

La (4-18) può anche scriversi :

$$\frac{2 \left(f_0 + \frac{W}{2} \right)}{m+1} \leq f_c \leq \frac{2 \left(f_0 - \frac{W}{2} \right)}{m} \quad (4-19)$$

Per ogni valore (intero) di m , inferiore al valore massimo M , pari al valore intero per difetto di $\left[f_0/W - 1/2 \right]$, la (4-19) definisce una regione nella quale può essere scelto il valore di f_c . Vi sono $M + 1$ di tali regioni. Il valore più piccolo di f_c sarà in corrispondenza del più grande valore (intero) di m , M , per il quale la (4-19) è ancora soddisfatta. Per $m = 0$ si ha la condizione $f_c \geq 2 \left(f_0 + W/2 \right)$, che corrisponde alla applicazione diretta del teorema di campionatura, considerando lo spettro del segnale estero tra $-(f_0 + W/2)$ ed $(f_0 + W/2)$.

La scelta più economica di f_c è quindi nell'intervallo per cui $m = M$. Si può verificare che in tale intervallo è $f_{c_{min}} > 2W$. Solo nel caso in cui $\left[f_0/W - 1/2 \right]$ è intero, allora $f_{c_{min}} = 2W$. In tal caso gli spettri positivi e negativi sono ripetuti in modo tale da costituire anche una coppia di spettri adiacenti allo zero, come in Fig. 39, a). Quindi lo spettro ripetuto può indifferentemente pensarsi ottenuto ripetendo lo spettro del tipo a) o b) di Fig. 39. Il risultato $f_{c_{min}} = 2W$ coincide quindi nei due casi.

Generalmente :

$$f_{c_{min}} = 2W \cdot \alpha = \frac{2 \left(f_0 + \frac{W}{2} \right)}{M+1} \quad (4-20)$$

Si può mostrare che α è tanto più prossimo ad 1 tanto più grande è il rapporto f_0/W .

.../...

Quando la (4-19) è soddisfatta, allora è possibile ripetere lo spettro ad intervalli f_c e ricostruirlo poi mediante opportuna funzione rettangolare ; ovvero :

$$s(f) = \underset{f_c}{\text{rep}} S(f) \cdot M(f) = \underset{f_c}{\text{rep}} S(f) \left[\text{rect} \frac{f-f_0}{w} + \text{rect} \frac{f+f_0}{w} \right] \quad (4-21)$$

La trasformata di $S(f)$ diviene :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{w}{f_c} \cdot \text{comb}_{1/f_c} \delta(t) \otimes \frac{\sin \pi w t}{\pi w t} \cdot \cos 2\pi f_0 t = \\ &= \frac{w}{f_c} \cdot \sum_n \delta\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot \frac{\sin \pi w \left(t - \frac{n}{f_c}\right)}{\pi w \left(t - \frac{n}{f_c}\right)} \cdot \cos 2\pi f_0 \left(t - \frac{n}{f_c}\right) \end{aligned} \quad (4-22)$$

quindi si ottiene il teorema della campionatura in fase :

$$s(t) = \sum_n \delta\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot g\left(t - \frac{n}{f_c}\right) \quad (4-23)$$

La (4-23) mostra quindi che è sufficiente campionare la $s(t)$ ad intervalli $1/f_c$, con f_c soddisfacente la (4-19). La ricostruzione di $s(t)$ è poi possibile mediante la funzione $g(t)$ di composizione.

Si può anche in questo caso pensare di ricostruire la $s(t)$ inviando i campioni in un filtro a banda stretta, la cui risposta impulsiva sia $f_c \cdot g(t)$.

Si possono ancora in questo caso ripetere le considerazioni fatte al paragrafo precedente, nel caso in cui si voglia sostituire ad un filtro rettangolare ideale uno con risposta reale. In tal caso la risposta del filtro $M(f)$ dovrà soddisfare a condizioni simili alla (4-16). Ovvero :

$$\begin{aligned} M(f) &= 1 && \text{per } f_0 - \frac{w}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{w}{2} \\ &= 0 && \text{per } (m+1)f_c - f_0 - \frac{w}{2} \leq |f| \leq mf_c - f_0 + \frac{w}{2} \end{aligned} \quad (4-24)$$

La funzione $g(t)$ sarà allora data da :

$$g(t) \iff \frac{1}{f_c} \cdot M(f) \quad (4-25)$$

Questa non sarà più necessariamente una funzione elementare, come nella (4-22). In tal caso la (4-23) perderà la sua espressività matematica, pur rimanendo valido il risultato di tale operazione.

Si noti infine che il filtro di risposta in frequenza $M(f)$, sia esso quello ideale o quello reale, potrebbe essere scelto, nella fase di ricostruzione del segnale, con la risposta $M(f)$ centrata attorno ad una diversa frequenza centrale; precisamente $f_0 \pm n \cdot f_c$, con n intero. Ciò corrisponderà ovviamente ad aver operata rispettivamente una modulazione ed una demodulazione del tipo a portante soppressa a seconda se il segno davanti ad n è positivo o negativo. Tale considerazione è valida pure per il caso della campionatura di segnali con spettro contenuto in $-W, W$, trattati nel paragrafo 4-2. In tal caso però è ovviamente possibile solo la modulazione.

b) Campionatura in fase e quadratura.

Vediamo ora un'altro teorema di campionatura, che si applica ancora ad i segnali del tipo b), Fig. 39, nel quale però la frequenza di campionatura è $f_c = W$, ed il campione è di forma complessa.

Consideriamo ancora il segnale $s(t)$, e formiamo da questo il segnale analitico :

$$z(t) = s(t) + j \hat{s}(t) \quad (4-25)$$

ove $\hat{s}(t)$ è la trasformata di Hilbert di $s(t)$.

Lo spettro di $z(t)$, $Z(f)$, occupa ora solo frequenze positive; pertanto la sua ripetizione non può dar luogo a sovrapposizioni, come nel caso precedente. Unica condizione sarà ancora, come nel paragrafo 4-2, $f_c \geq W$.

Si può perciò scrivere :

$$Z(f) = \text{rep}_{f_c} Z(f) \cdot \text{rect} \frac{f-f_0}{W} \quad (4-27)$$

ove si è scelto $M(f) = \text{rect} \frac{f-f_0}{W}$.

Trasformando la (4-27) :

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{W}{f_c} \cdot \text{comb}_{1/f_c} z(t) \otimes \frac{\sin \pi W t}{\pi W t} \cdot e^{j 2\pi f_0 t} = \\ &= \frac{W}{f_c} \cdot \sum_n z\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot \frac{\sin \pi W \left(t - \frac{n}{f_c}\right)}{\pi W \left(t - \frac{n}{f_c}\right)} \cdot e^{j 2\pi f_0 \left(t - \frac{n}{f_c}\right)} \end{aligned}$$

(4-28)

Ovvero il segnale $z(t)$ è descritto, secondo la (4-28), mediante campioni complessi $z(n/f_c) = s(n/f_c) + j \hat{s}(n/f_c)$, presi alla frequenza f_c . La minima frequenza di campionatura è $f_c = W$.

.../...

Operando ora la parte reale membro a membro della (4-28), si ha, ponendo $f_c = W$:

$$s(t) = \Re_e \{z(t)\} = \sum_n \hat{s}\left(\frac{n}{W}\right) \cdot a\left(t - \frac{n}{W}\right) - \sum_n \hat{s}\left(\frac{n}{W}\right) \cdot b\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (4-29)$$

ove $a(t) = \cos 2\pi f_0 t \cdot \frac{\sin \pi W t}{\pi W t} \quad (4-30)$

$$b(t) = \sin 2\pi f_0 t \cdot \frac{\sin \pi W t}{\pi W t} \quad (4-31)$$

La (4-29) descrive il teorema di campionatura in fase e quadratura. Essa mostra infatti che è necessario dare un campione in fase $\hat{s}(n/W)$ ed uno in quadratura $\hat{s}(n/W)$ ogni $1/W$ per poter descrivere completamente il segnale $s(t)$. La ricostruzione della $s(t)$ avviene secondo la (4-29) mediante le due funzioni $a(t)$ e $b(t)$, mutualmente ortogonali.

La funzione $[a(t) + j b(t)] \cdot W$ rappresenta la risposta impulsiva di un filtro analitico all'ingresso del quale vengono inviati i campioni complessi. La risposta in frequenza di tale filtro è la funzione $M(f)$, che nel caso delle (4-30) e (4-31) è della forma $M(f) = \text{rect} \frac{f - f_0}{W}$.

Se si considera la $z(t)$ della forma:

$$z(t) = [A(t) + j B(t)] \cdot e^{j \omega_0 t} \quad (4-32)$$

si ha:

$$s(t) = \Re_e \{z(t)\} = A(t) \cdot \cos \omega_0 t - B(t) \cdot \sin \omega_0 t \quad (4-33)$$

$$\hat{s}(t) = \Im_m \{z(t)\} = A(t) \cdot \sin \omega_0 t + B(t) \cdot \cos \omega_0 t \quad (4-34)$$

Se ora il segnale è a banda stretta, ovvero $f_0 \gg W$, si ha:

$$\hat{s}(t) \approx s(t + \frac{\pi}{2\omega_0}) = s(t + \Delta t) \quad (4-35)$$

ove $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_0}$ corrisponde alla rotazione della portante di 90° . Essendo infatti il segnale a banda stretta si può considerare:

$$A(t + \Delta t) \approx A(t)$$

$$\text{Ed è poi: } \cos \omega_0 (t + \Delta t) = \sin \omega_0 t$$

$$\sin \omega_0 (t + \Delta t) = -\cos \omega_0 t$$

Quindi della (4-35) si vede che i campioni $\hat{s}(n/W)$ possono ottenersi campionando sempre la $s(t)$, Δt secondi dopo la campionatura in fase. (Fig. 41).

.../...

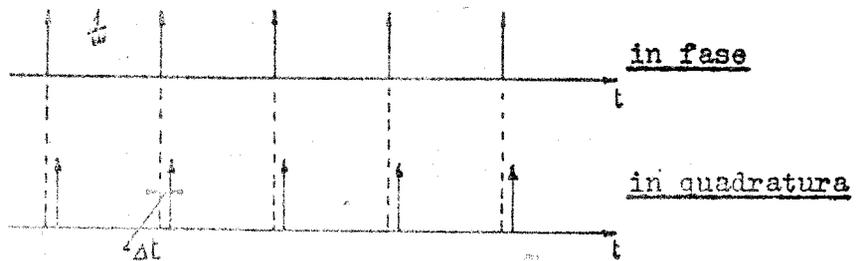


Fig. 41

c) Demodulazione e campionatura.

È questo un altro metodo di trattare un segnale del tipo b), Fig. 35, fini di descriverlo mediante suoi campioni.

Si consideri il segnale reale del tipo (4-33) :

$$s(t) = A(t) \cdot \cos \omega_0 t - B(t) \cdot \sin \omega_0 t \quad (4-33)$$

Si operi ora una demodulazione complessa di $s(t)$, ovvero lo si moltiplichi per $\cos \omega_0 t$ e per $\sin \omega_0 t$, filtrando i termini a frequenza $2\omega_0$. I prodotti della demodulazione sono rispettivamente le funzioni $A(t)$ e $B(t)$ che occupano lo spettro $-W/2, W/2$. Si noti che è questa l'operazione inversa di quella descritta in Fig. 16.

I segnali $A(t)$ e $B(t)$ possono ora essere entrambi campionati alla frequenza W , essendo $\frac{W}{2}$ la frequenza massima del loro spettro. Il segnale $s(t)$ è quindi ancora, come per la (4-29), descritto mediante $2W$ campioni al secondo, W del segnale $A(t)$ e W del segnale $B(t)$. La ricostruzione di $s(t)$ avviene ricostruendo separatamente $A(t)$ e $B(t)$ secondo la (4-15), modulando poi le due funzioni rispettivamente per $\cos \omega_0 t$ e $\sin \omega_0 t$, e facendone infine la differenza.

Un altro metodo per descrivere $s(t)$ è quello di demodulare per $\cos(\omega_0 - 2\pi W/2)t$. Si viene in tal modo a portare lo spettro adiacente allo zero; lo spettro viene ad occupare la banda $-W, W$. Il segnale così ottenuto è ancora descrivibile mediante $2W$ campioni al secondo.

4-4 Correlazione e segnali campionati.

Siano $s(t)$ e $p(t)$ due segnali occupanti la banda $-W, W$. Dimostriamo ora il seguente teorema :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot p(t) \cdot dt = \frac{1}{2W} \sum_n s\left(\frac{n}{2W}\right) \cdot p\left(\frac{n}{2W}\right) \quad (4-36)$$

Si ha infatti dalla (4-15) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot p(t) \cdot dt = \sum_m \sum_n s\left(\frac{n}{2W}\right) \cdot p\left(\frac{m}{2W}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t - \frac{n}{2W}\right) \cdot g\left(t - \frac{m}{2W}\right) \cdot dt \quad \dots/\dots \quad (4-37)$$

ora è :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t - \frac{m}{2w}\right) \cdot g\left(t - \frac{m}{2w}\right) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi w t - m\pi)}{2\pi w t - m\pi} \cdot \frac{\sin(2\pi w t - m\pi)}{2\pi w t - m\pi} \cdot dt = \quad (4-38)$$

$$= 0 \quad \text{per } m \neq 0$$

$$= \frac{1}{2w} \quad \text{per } m = n \quad \left(\text{grazie alla proprietà di ortogonalità delle funzioni } \frac{\sin x}{x} \right)$$

Dalla (4-37) deriva quindi direttamente, tramite la (4-38), la (4-36). Si noti che la (4-36) è generalmente dimostrabile anche nel caso in cui $f(t)$ non sia del tipo $\frac{\sin x}{x}$, ovvero nei casi in cui la funzione "finestra" $M(f)$ sia generalmente del tipo (4-16).

Se i segnali $s(t)$ e $p(t)$ occupano una banda W attorno alla portante f_0 , la (4-36), grazie al teorema (4-29) diviene :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot p(t) \cdot dt = \frac{1}{W} \sum_n s\left(\frac{m}{W}\right) \cdot p\left(\frac{m}{W}\right) - \frac{1}{W} \sum_n \hat{s}\left(\frac{m}{W}\right) \cdot \hat{p}\left(\frac{m}{W}\right) \quad (4-39)$$

Le (4-36) e (4-39) rappresentano un importante teorema. Da queste deriva infatti che l'integrale del prodotto di due funzioni può essere calcolato mediante la somma dei prodotti dei loro campioni.

In particolare si ha, applicando la (4-15) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot p(t - \tau) \cdot dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n s\left(\frac{m}{2w}\right) \cdot p\left(\frac{k}{2w}\right) \cdot g\left(t - \frac{m}{2w}\right) \cdot g\left(t - \tau - \frac{k}{2w}\right) \cdot dt = \\ &= \sum_n \sum_k s\left(\frac{m}{2w}\right) \cdot p\left(\frac{k}{2w}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t - \frac{m}{2w}\right) \cdot g\left(t - \tau - \frac{k}{2w}\right) \cdot dt \end{aligned}$$

Similmente alla (4-38) l'integrale assume i valori :

$$\begin{aligned} 0 & \text{ per } t - \frac{m}{2w} \neq t - \tau - \frac{k}{2w} \\ \frac{1}{2w} & \text{ per } t - \frac{m}{2w} = t - \tau - \frac{k}{2w} \end{aligned}$$

Da cui deriva, per $\tau = \frac{m}{2w} - \frac{k}{2w}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot p(t - \tau) \cdot dt = \frac{1}{2w} \sum_n s\left(\frac{m}{2w}\right) \cdot p\left(\frac{m}{2w} - \tau\right) \quad (4-40)$$

.../...

La (4-40) può anche scriversi nella forma (4-39), per segnali il cui spettro W è attorno ad una portante f_0 .

Si noti che la (4-40) rappresenta l'integrale di correlazione incrociata $C_{sp}(\tau)$. Quindi, tale integrale può essere calcolato facendo uso dei campioni dei due segnali, per i valori di τ per i quali è:

$$\tau = \frac{m}{2W} - \frac{k}{2W} \quad (\text{con } m, k \text{ interi}) \quad (4-41)$$

La (4-41) significa che i possibili incrementi di τ per i quali la (4-40) è ancora valida sono in corrispondenza dei campioni delle due funzioni. Quindi la (4-40) permette di calcolare la funzione $C_{sp}(\tau)$ in corrispondenza degli istanti di campionatura dei due segnali. La $C_{sp}(\tau)$ risulta quindi anch'essa campionata alla stessa frequenza ($2W$, per la (4-40)) di campionatura dei due segnali. I valori della $C_{sp}(\tau)$, per valori di τ diversi da quelli della (4-41), possono essere calcolati ancora interpolando i valori della $C_{sp}(\tau)$ campionata mediante la funzione $q(t)$.

La (4-40) offre la possibilità di semplificare le soluzioni tecniche per la costruzione della funzione $C_{sp}(\tau)$. In tal caso infatti non è più necessario ritardare una intera funzione, bensì è sufficiente ritardare i suoi campioni.

4-5 Campioni di larghezza finita.

Nei paragrafi precedenti si è considerato di campionare la funzione con impulsi δ . In realtà i campioni hanno durata ed ampiezza finite. Si dovrà perciò sostituire alla funzione $\sum \delta(t - n/2W)$ della (4-9) la funzione $\sum_{rep} \frac{1}{2W} [\text{rect } t/\theta]$, ove con θ si è indicata la larghezza dei campioni (con $\theta \ll \frac{1}{2W}$).

La trasformata di tale funzione è:

$$2W \cdot \theta \cdot \text{comb}_{2W} \left[\frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta} \right]$$

Si ha perciò:

$$s(t) \cdot \sum_{rep} \frac{1}{2W} \left[\text{rect } \frac{t}{\theta} \right] \iff S(f) \otimes 2W \cdot \theta \cdot \text{comb}_{2W} \left[\frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta} \right] \quad (4-42)$$

Le (4-41) sono rappresentate in Fig. 42.

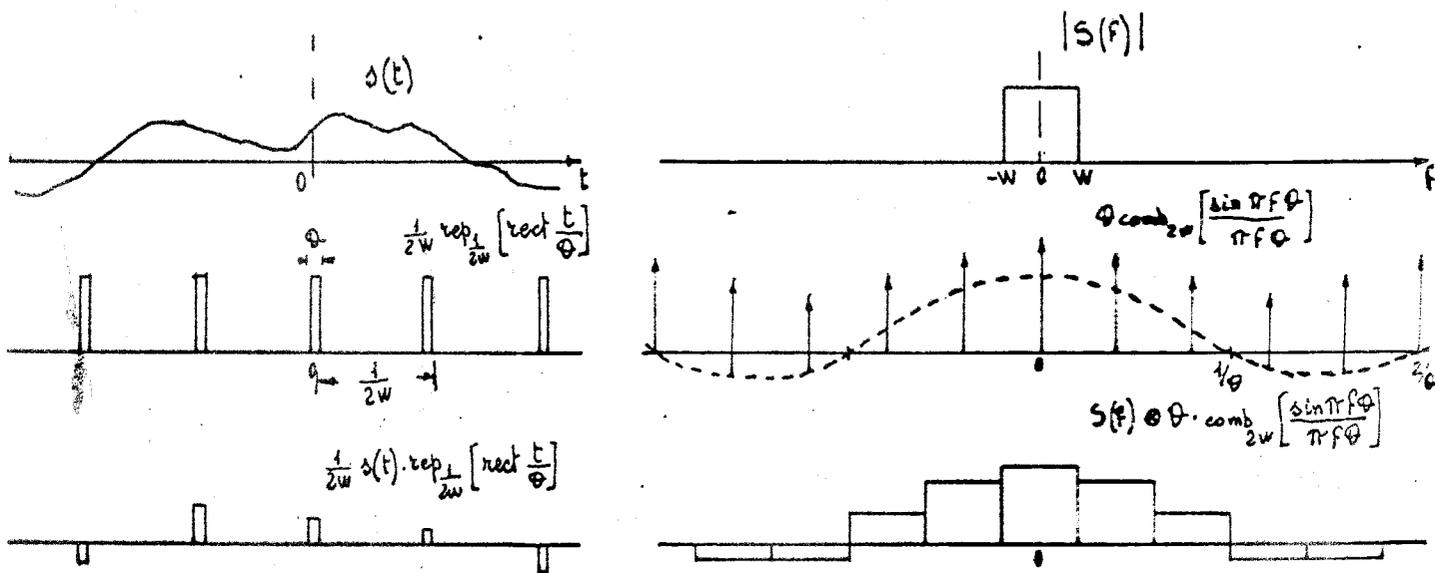


Fig. 42

Si noti che l'effetto della durata finita degli impulsi sullo spettro ripetuto è quello di moltiplicare il termine di ordine n , $S(f-2W.n)$, per $\frac{\sin 2\pi n W \theta}{2\pi n W \theta} \cdot \theta \cdot 2W$. Ciò comporta una progressiva attenuazione delle componenti ad alta frequenza. La parte dello spettro compresa tra $-W$, W viene attenuata di $2W \cdot \theta$. Nel caso limite in cui $\theta = 1/2W$, la funzione $\text{rep}_{1/2W}[\text{rect } t/\theta]$ diviene una costante e non si ha più campionatura della $s(t)$. Nel caso in cui il segnale sia campionabile secondo la (4-29), le considerazioni precedenti sono ancora valide. La parte interessante dello spettro ripetuto, compresa tra $f_0 - \frac{W}{2}$ ed $f_0 + \frac{W}{2}$, viene ancora a risentire del fattore di attenuazione.

4-6 Funzioni descrivibili mediante $N = 2W.T$ campioni.

Abbiamo considerato finora funzioni o illimitate, oppure limitate in uno solo dei due domini di descrizione.

Si è visto come nel caso di funzioni illimitate, periodiche od aleatorie, si debba ricorrere ad una descrizione mediante la potenza, essendo la loro energia illimitata.

Si è visto poi come, nel caso di funzioni limitate nel tempo o nella frequenza, la descrizione completa sia ottenibile mediante una serie infinita di campioni. Precisamente, se la funzione è limitata nel tempo il suo spettro risulterà illimitato, e sarà necessaria una serie infinita di campioni per descriverla completamente.

Analogamente, se la funzione è limitata nella frequenza, sarà necessaria una serie infinita di campioni presi sulla funzione, che si estenderà ora su tutto il dominio del tempo.

Spesso le funzioni vengono considerate limitate nel tempo e nella frequenza. Infatti spesso i fenomeni fisici sono caratterizzati dal fatto che la loro energia si sviluppa in un intervallo limitato di tempo ed occupa una banda limitata di frequenza. Teoricamente si può dimostrare che non è possibile costruire una coppia di trasformate di Fourier entrambe contenute in un intervallo finito. Tuttavia in pratica è possibile rappresentare un segnale, che occupa la banda W per la durata T , mediante $2WT = N$ campioni. Tale rappresentazione è sempre approssimata. Il grado di approssimazione dipende dal valore del prodotto $2WT = N$; e precisamente, se $2WT = N \gg 1$, allora la ricostruzione del segnale mediante i suoi N campioni può essere operata con buona precisione.

Si noti infatti che nell'operazione di ricostruzione si opera una interpolazione tra i valori dei campioni ed il valore della funzione in un generico punto è ottenuto sommando i contributi delle infinite funzioni $\frac{\sin \pi x}{x}$ corrispondenti agli infiniti campioni. Ovviamente in pratica si potrà pensare di considerare un numero finito di tali contributi, dato che quelli dei campioni al di là di una certa distanza divengono trascurabili. Se ora limitiamo la ricostruzione ad un numero finito di campioni si potrà ricostruire la parte centrale del segnale con buona precisione se è $N = 2WT \gg 1$.

L'errore di interpolazione sarà però considerevole agli estremi del segnale, ove la considerazione precedente non è più applicabile.

Se però è $N = \gg 1$, allora la durata della zona estrema affetta da errore di interpolazione sarà piccola rispetto a T , per cui è ancora vero che tale effetto sarà tanto più trascurabile tanto più è $N = \gg 1$.

Il prodotto $2WT = N$, rappresentando il numero di campioni della funzione nel tempo T , ed essendo questi genericamente indipendenti tra loro, rappresenta perciò i gradi di libertà della funzione.

4-7 Rappresentazione delle funzioni nel piano di Gabor.

Una funzione limitata nel tempo e nella frequenza può essere decomposta in una somma finita di funzioni elementari, tutte dello stesso tipo.

Vi possono essere molti tipi di tali funzioni elementari; tutte però dovranno avere energia finita e possibilmente basso valore del prodotto TW .

Detta $\phi(t)$ una di tali funzioni elementari, questa può genericamente pensarsi ottenuta dalla funzione elementare $\phi(t)$, mediante la traslazione $n \cdot \theta$ in tempo ed $\frac{m}{\theta}$ in frequenza. Ovvero:

$$\phi_{m,n}(t) = \phi(t - n \cdot \theta) \cdot e^{j2\pi \frac{m}{\theta} t} \quad (4-43)$$

Quasi ogni segnale $s(t)$, limitato nel tempo e nella frequenza è descrivibile mediante $N = 2WT$ gradi di libertà, può essere espresso come:

$$s(t) = \sum_{m,n} a_{m,n} \cdot \phi_{m,n}(t) \quad (4-44)$$

Ove $a_{m,n}$ sono dei coefficienti.

Si può ora pensare ad una rappresentazione grafica della (4-44) nel piano tempo-frequenza.

Ad ogni funzione $\phi_{m,n}(t)$ si assegna un rettangolo di dimensioni θ sull'asse t ed $1/\theta$ sull'asse f .

Ad ogni rettangolo apparterrà un coefficiente $a_{m,n}$.

Vi sono in totale $(T/\theta) \cdot (2W \cdot \theta) = N$ rettangoli nella rappresentazione, compresi in un rettangolo di lati T e $2W$.

I valori dei coefficienti $a_{m,n}$ dipendono della scelta di $\phi(t)$ e di θ .

Tuttavia, se la funzione $\phi(t)$ è scelta in modo che la sua durata sia circa uguale a θ ed il suo spettro occupi circa la banda $1/\theta$, allora i coefficienti $a_{m,n}$ non cambiano apprezzabilmente nella rappresentazione per diverse funzioni $\phi(t)$.

In conseguenza la funzione $\phi(t)$ è in un certo senso arbitraria e può essere scelta a seconda della rappresentazione più conveniente.

In Fig. 43 viene mostrato, come esempio, la suddivisione del piano $2TW = N = 9$ in tre modi diversi, per una funzione $s(t)$ arbitraria. Nella rappresentazione a), tempo e frequenza sono divisi equamente, ovvero $\theta = T/\sqrt{N}$, $1/\theta = 2W/\sqrt{N}$. Nella b), θ è scelto uguale all'intervallo di campionatura, ovvero $\theta = 1/2W$. Quindi la $s(t)$ è qui rappresentata mediante campioni presi nel tempo. Se si fa $\theta = T$, caso c), ciò equivale a rappresentare la funzione nel dominio della frequenza.

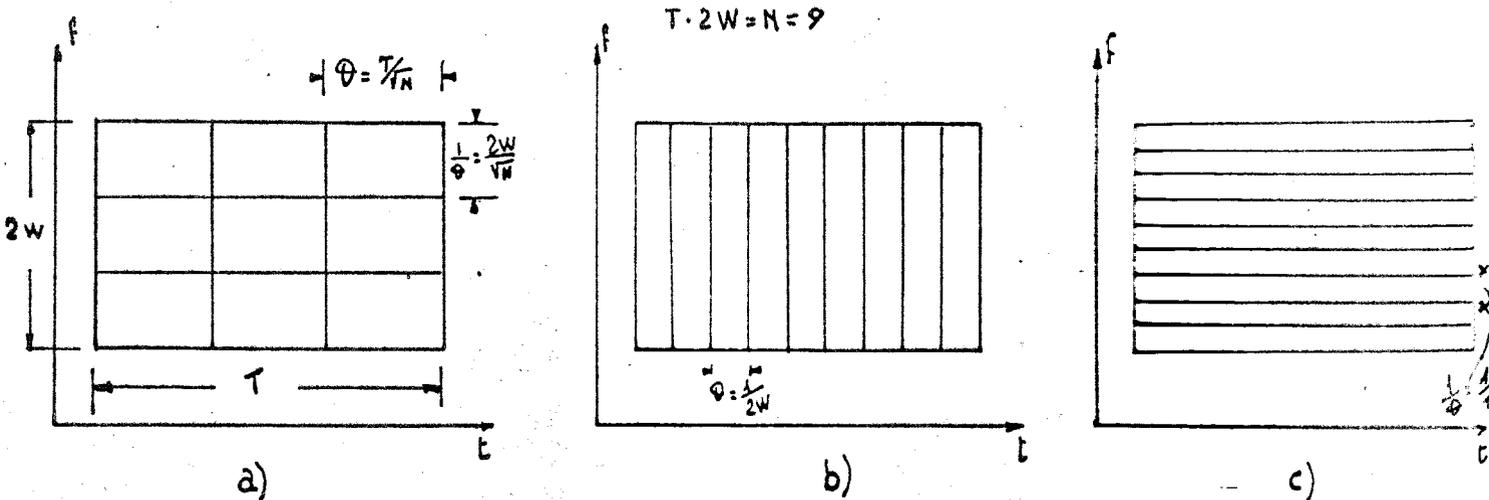


Fig. 43

DA BIBL. N° 4

.../...