## 5.0. - Introduzione

Molti sistemi fisici, quali i filtri elettrici, servomeccanismi, etc..., possono essere rappresentati come in Fig. 44, mediante cioè una scatola "nera" fornita di un ingresso ed una uscita.

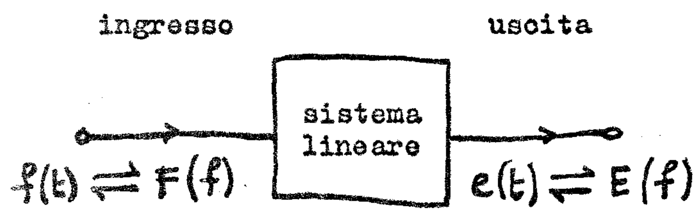


Fig. 44

Se il sistema in esame è lineare allora il legame tra ingresso ed uscita è esprimibile mediante una equazione integro-differenziale. Se i coefficienti della equazione sono costanti nel tempo allora si ha un sistema lineare ed invariante nel tempo. Se i coefficienti sono variabili nel tempo, il sistema è anch'esso variabile nel tempo.
E'solo il primo tipo di sistemi che vengono esaminati nel seguito.
Per i sistemi lineari vale il concetto della sovrapposizione lineare, secondo il quale ad una somma di cause (ingressi) corrisponde un effetto (uscita) uguale alla somma dei singoli effetti prodotti dalle singole cause. E' questo del resto direttamente deducibile dal metodo di soluzione della equazione integro-differenziale, secondo il quale la soluzione generale è la somma di soluzioni particolari, quella transitoria e quella a regime.

## 5.1. - Funzione di trasferta e risposta impulsiva

Il comportamento di un sistema lineare può indifferentemente essere descritto mediante due funzioni, tra loro legate dalla trasformazione di Fourier, la funzione di trasferta $H(f)$ e la risposta impulsiva $h(t)$.

La $H(f)$, funzione di trasferta o risposta in frequenza, si definisce come il rapporto dello spettro di Fourier dell'uscita, $E(f)$, con lo spettro di Fourier dell'ingresso $F(f)$ ; ovvero

$$H(f) = \frac{E(f)}{F(f)} \qquad (5-1)$$

La funzione $H(f)$ può essere ottenuta mediante misurazione od analisi. Mediante misurazione, si può inviare un segnale sinusoidale continuo ed a frequenza costante all'ingresso e misurare la risposta in ampiezza e fase all'uscita. Tale misura viene ripetuta per sufficienti valori della frequenza in modo da poter tracciare le curve di risposta di ampiezza e fase.

La determinazione di $H(f)$ mediante analisi avviene secondo il seguente procedimento :

1. determinare l'equazione integro-differenziale che lega ingresso ad uscita.

.../...

2. sostituire il termine algebrico ( $j\omega$ ) per l'operazione d/dt, ( $j\omega$ )$^2$ per $d^2/dt^2$ , $1/j\omega$ per $\int dt$, etc...

3. risolvere la risultante equazione algebrica, espressa secondo il rapporto tra uscita ed ingresso, in funzione di $\omega$ .

Dalla (5-1) si ottiene poi :

$E(f) = H(f) \cdot F(f)$, per cui :

$$e(t) = \int E(f) \cdot e^{j\omega t} \cdot df = \int H(f) \cdot F(f) \cdot e^{j\omega t} \cdot df \tag{5-2}$$

Nel caso in cui sia $f(t) = \delta(t)$, allora è $F(f) = 1$.

Sostituendo pertanto tali condizioni nella (5-2) si ha :

$$e(t) = \int 1 \cdot H(f) \cdot e^{j\omega t} \cdot df = h(t) \tag{5-3}$$

ove è :

$$h(t) \rightleftharpoons H(f)$$

Quindi la $h(t)$, trasformata di $H(f)$, è la risposta del sistema all'impulso $\delta(t)$ ; $h(t)$ è detta <u>risposta impulsiva del sistema</u>.

Dalla (5-1) si ottiene poi :

$$|E(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |F(f)|^2 \tag{5-4}$$

che è equivalente alla seguente :

$$W'_e(f) = |H(f)|^2 \cdot W'_f(f) \tag{5-5}$$

Ovvero, lo spettro di potenza del segnale d'uscita è uguale a quello del segnale d'ingresso, moltiplicato per $|H(f)|^2$ .

## 5.2. - <u>Integrale di convoluzione</u>.

Si è già accennato a l'integrale di convoluzione con riferimento ad un sistema lineare nel paragrafo 1-5, b).
Ripetiamo qui il seguente procedimento :

Inviando all'ingresso di un sistema lineare l'impulso $\delta(t)$ si ottiene all'uscita la funzione $h(t)$.
La funzione $\delta(t-\tau)$ produce all'uscita $h(t-\tau)$.
Si ha poi, dalla proprietà dell'integrale di convoluzione :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \tag{5-6}$$

.../...

Dal principio della sovrapposizione lineare, sostituendo alla somma di cause la somma dei singoli effetti si ha :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau = f \otimes h \qquad (5\text{-}7)$$

Ovvero, la funzione di uscita di un sistema lineare $e(t)$ è data dalla convoluzione tra la funzione di ingresso $f(t)$ e la risposta impulsiva del sistema $h(t)$.

E' poi valida l'equivalenza seguente :

$$e(t) = \int f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau = \int F(f)\cdot H(f)\cdot e^{j\omega\tau}\cdot df \qquad (5\text{-}8)$$

Questa può dimostrarsi nel seguente modo :

$$E(f) = \int e(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \iint f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau\cdot e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \int f(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot\left[\int h(t-\tau)\cdot e^{-j\omega(t-\tau)}\cdot dt\right]\cdot d\tau = F(f)\cdot H(f)$$

Quindi :

$$e(t) = \int E(f)\cdot e^{j\omega t}\cdot dt = \int F(f)\cdot H(f)\cdot e^{j\omega t}\cdot dt$$ , da cui la (5-8).

Se si pone poi nella (5-8) $t=0$, si ottiene il Teorema di Parseval :

$$\int f(\tau)\cdot h(-\tau)\cdot d\tau = \int F(f)\cdot H(f)\cdot df \qquad (5\text{-}9)$$

Che in forma più nota può scriversi :

$$\int f(t)\cdot g(t)\cdot dt = \int F(f)\cdot G^*(f)\cdot df \qquad (5\text{-}10)$$

## 5.3. - Misura della funzione di trasferta mediante rumore.

La funzione $H(f)$ può essere misurata genericamente mediante la relazione (5-1), misurando cioè lo spettro di Fourier dell'uscita e dell'entrata, e facendone il rapporto. Nel caso in cui il segnale d'ingresso sia illimitato caotico tale metodo decade, mentre si può fare ricorso ad altre grandezze. Precisamente , dette $e(t)$ ed $f(t)$ le funzioni d'uscita ed ingresso

.../...

del sistema, si ha :

$$C_{fe}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e(t-\tau)\cdot dt \tag{5-11}$$

$$e(t) = \int_0^{\infty} h(\beta)\cdot f(t-\beta)\cdot d\beta \tag{5-12}$$

e sostituendo la (5-12) in (5-11) :

$$C_{fe}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\beta)\cdot C_{ff}(\tau-\beta)\, d\beta \tag{5-13}$$

Trasformando la (5-13) si ottiene poi :

$$W'_{ef}(f) = H(f)\cdot W'_{ff}(f) \tag{5-14}$$

dalla quale :

$$H(f) = \frac{W'_{ef}(f)}{W'_{ff}(f)} \tag{5-15}$$

Essendo inoltre $W'_{ff}(f)$ reale, si ha :

$$\measuredangle H(f) = \measuredangle W'_{ef}(f) \tag{5-16}$$

Nel caso di rumore bianco di densità di potenza $No = W'_{ff}(f)$, si ha :

$$H(f) = \frac{W'_{ef}(f)}{No} \tag{5-17}$$

$$h(\tau) = \frac{C_{ef}(\tau)}{No} \tag{5-18}$$

Altre relazioni relative alla funzione d'uscita e(t).

Applicando formulazioni statistiche e temporali si ottiene :

$$E\left[e(t)\right] = \overline{e(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t-\tau)}\cdot h(\tau)\cdot d\tau \tag{5-19}$$

Nel caso in cui f(t) è stazionaria si ha $\overline{f(t)} = \overline{f(t-\tau)}$, da cui :

$$\overline{e(t)} = \overline{f(t)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot d\tau \tag{5-20}$$

.../...

Si ha poi :

$$C_e(t_1,t_2) = \overline{e(t_1)\cdot e(t_2)} = \iint h(\alpha)\cdot h(\beta)\cdot f(t_1-\alpha)\cdot f(t_2-\beta)\cdot d\alpha\cdot d\beta \qquad (5\text{-}21)$$

Se f(t) è stazionaria si ha :

$$\overline{f(t_1-\alpha)\cdot f(t_2-\beta)} = C_f(\tau+\beta-\alpha) \qquad (5\text{-}22)$$

ove $\tau = t_1 - t_2$

dalla (5-22) si ha poi :

$$C_e(\tau) = \iint h(\alpha)\cdot h(\beta)\cdot C_f(\tau+\beta-\alpha)\cdot d\alpha\cdot d\beta \qquad (5\text{-}23)$$

Dalla (5-23), trasformando si ha poi ancora la (5-5) :

$$W_e'(f) = \int C_e(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\cdot d\tau = |H(f)|^2\cdot W_f'(f) \qquad (5\text{-}24)$$

Si ha poi :

$$\overline{e(t)^2} = 2\cdot\int_0^\infty W_e'(f)\cdot df = \iint h(\alpha)\cdot h(\beta)\, C_f(\beta-\alpha)\cdot d\alpha\cdot d\beta \qquad (5\text{-}25)$$

Si noti che, date le proprietà statistiche dell'ingresso, ovvero la funzione di densità di probabilità, è difficile il calcolo della stessa funzione all'uscita, ad eccezione del caso di funzione d'ingresso aleatoria gaussiana.
In tal caso infatti l'uscita è sempre gaussiana e la densità di probabilità è determinata dalla funzione di autocorrelazione.

## 5.4. - I filtri lineari.

Una particolare classe dei sistemi lineari è costituita dai filtri lineari, ovvero da quei sistemi che operano su di una funzione d'ingresso un'operazione di selezione di particolari componenti rispetto all'insieme.

.../...

Alla classe dei filtri lineari appartengono i classici filtri di frequenza. Questi operano la separazione di due classi di segnali i cui spettri non si sovrappongono. La definizione dei filtri classici non tiene conto di proprietà statistiche.

Un'altra classe di filtri che ricoprono grande importanza, soprattutto nelle moderne tecniche del trattamento dei segnali, sono quelli che operano la separazione di un dato segnale dal rumore, il cui spettro è sovrapposto a quello del segnale. In questo caso la statistica dei segnali ha notevole importanza nella determinazione del filtro. E' necessario scegliere un criterio appropriato per stabilire il migliore tipo di filtro. Tale criterio dipende dalla grandezza che si vuole ottimizzare. Una classe di tali filtri che operano l'ottimizzazione della possibilità di rivelare la presenza del messaggio nel rumore.è quella dei filtri di pre-rivelazione dei quali fanno parte i filtri adottati.

Esamineremo le proprietà di ottimizzazione di quest'ultimi nel seguito. Per il momento ci interessa qui riportare alcune loro proprietà.

## 5.5. - Correlazione mediante filtraggio.

Si è visto che per un filtro lineare la funzione d'uscita è data dall'integrale di convoluzione tra ingresso e risposta impulsiva ; ovvero :

$$e(t) = \int f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau \qquad (5\text{-}26)$$

Se ora si pone $h(t) = g(-t)$, ovvero :

$h(t-\tau) = g(\tau-t)$, sostituendo nella (5-26) si ottiene :

$$e(t) = \int f(\tau)\cdot g(\tau-t)\cdot d\tau \qquad (5\text{-}27)$$

e sostituendo $t$ con $\tau$, si ottiene l'integrale di correlazione incrociata tra le funzioni $f(t)$ e $g(t)$, ovvero :

$$e(\tau) = C_{f\cdot g}(\tau) = \int f(t)\cdot g(t-\tau)\cdot dt \qquad (5\text{-}28)$$

Se è in particolare $h(t-\tau) = f(\tau-t)$, la (5-28) diviene la funzione di autocorrelazione :

$$C_f(\tau) = \int f(t)\cdot f(t-\tau)\cdot dt \qquad (5\text{-}29)$$

In tal caso il filtro si dice adattato.

.../...

Dalla posizione $h(t) = f(-t)$ deriva, trasformando membro a membro :

$$H(f) = F(-f) = F^*(f) \tag{5-30}$$

Sostituendo ora la (5-30) nella (5-1) si ottiene :

$$E(f) = H(f).F(f) = F^*(f).F(f) = |F(f)|^2 \tag{5-31}$$

Ovvero lo spettro di Fourier del segnale d'uscita dal filtro adattato è uguale allo spettro di energia del segnale d'ingresso.