CAPITOLO 7
INTEGRAZIONE DEFINITA DELLE FUNZIONI

Tratteremo in questo capitolo dell'integrazione definita delle funzioni, siano queste espresse mediante formule matematiche, siano esplicitate mediante tabelle. Vedremo l'utilità del Qbasic nel computo di questi integrali che sono di fondamentale importanza per numerose applicazioni in campo tecnico e didattico.

7.1 L'integrale definito di una funzione

Per gli sviluppi che andremo ad esporre nei paragrafi seguenti, giova ricordare i concetti basilari di analisi matematica relativi al calcolo dell'integrale definito di una funzione:
viene detto **integrale definito di $y = f(x)$** l'espressione:

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\,dx}$$

Il significato di questa simbologia è duplice
-il valore I rappresenta la sommatoria di infiniti prodotti tra la funzione $f(x)$ e l'incremento infinitesimale dx calcolati tra i limiti di variabilità di x compresi tra (a) e (b).
-il valore I che si ottiene dal calcolo dell'integrale rappresenta l'area della superficie sottesa dal tratto di curva $f(x)$, definita tra $x = a$ ed $x = b$.
Per entrambi i concetti il calcolo dell'integrale definito segue le stesse regole dettate dall'analisi matematica alle quali si rimanda il lettore interessato a rivedere l'argomento.
Per i nostri scopi non è necessario applicare le regole menzionate dato che affidiamo ad appositi programmi in Qbasic il computo dell'integrale in oggetto.

7.2 Il calcolo di un integrale definito

Prima di passare alla compilazione dei programmi applicativi per il computo dell'integrale definito è utile proporre, in termini estremamente semplici, un esempio di calcolo per un integrale elementare.
Sia data la funzione

$$y = x^2$$

se ne calcoli l'integrale definito nel campo di variabilità di x compreso tra $a = 0$ e $b = 10$ cioè:

$$I = \int_0^{10} (x)^2\,dx = \Big[\,(x)^3 / 3\,\Big]_0^{10} = 333.333$$

il valore di I, ottenuto mediante il procedimento di analisi matematica, servirà da confronto con il primo risultato che otterremo applicando un programma in Qbasic per il computo di questo integrale.

7.3 Criterio di approssimazione per il calcolo dell'integrale definito

Nel paragrafo 7.1 abbiamo dato la definizione:

-il valore I rappresenta la sommatoria di infiniti prodotti tra la funzione f(x) e l'incremento infinitesimale dx calcolati tra i limiti di variabilità di x compresi tra (a) e (b),
questa definizione permette di ricavare una formula approssimativa per il calcolo dell'integrale definito implementabile in Qbasic; infatti l'espressione di sommatoria

$$I \cong \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\, s$$

risponde alla definizione data per l'integrale salvo il numero finito dei prodotti e la sostituzione dell'infinitesimo dx con un numero s molto piccolo. I prodotti che entrano nella sommatoria, nell'assunto che x di f(x) si incrementi dello stesso valore s, hanno la seguente struttura:

$$f(a)\,s + f(a+s)\,s + f(a+2s)\,s + f(a+3s)\,s + \dots\dots\dots + f(a+ns)\,s + f(b)\,s$$

Si comprende che più sono i prodotti e più è piccolo il valore di s tanto più la sommatoria approssimerà il valore teorico calcolato tramite l'integrale.

7.4 Il programma in Qbasic per il computo dell'integrale definito

Con le informazioni acquisite nei paragrafi precedenti procediamo alla stesura di un programma in Qbasic in grado di implementare la sommatoria:

$$I \cong \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\, s$$

Ricordando quanto spiegato nel paragrafo 2.26 abbiamo tutti gli elementi per ottenere quanto vogliamo; riportiamo pertanto il programma di detto paragrafo adattandolo ai simboli della nuova sommatoria

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a= " ; a ' richiesta di ingresso valore inferiore del campo di variabilità della x

INPUT " b= " ; b ' richiesta di ingresso valore superiore del campo di variabilità della x

INPUT " s=" ; s ' richiesta di ingresso valore sostituto dell'infinitesimo ed incremento di x

FOR x = a TO b STEP s ' impone che la variabile indipendente (x) inizi il calcolo assumendo il
                      ' valore (a) , quando l'esecuzione del programma giunge alla istruzione
                      ' NEXT, il programma ritorna all'istruzione FOR che incrementa x del
                      ' valore (s) . Il ciclo si ripete con incrementi di (s) per arrestarsi
                      ' quando il valore di x ha raggiunto il valore (b)

Y = f ( x ) ' funzione da integrare

P = s * Y ' prodotto della funzione per il sostituto s dell'infinitesimo

I = P + I ' somma al valore di I in memoria ( uguale a zero all'inizio) il primo valore di P , e
          ' sostituisce in memoria il valore di I=0 con il valore di I=P , dopo la prima istruzione
          ' NEXT, x si incrementa d i ( s ) e di conseguenza si ha un cambiamento di P; il valore      &
```

' di I in memoria si aggiorna sommandosi al nuovo valore di P, le somme si ripetono
' con ulteriori aggiornamenti del valore di I in memoria fino a quando x raggiunge il
' valore (b) dell'estremo superiore del campo di variabilità

```
NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR per un successivo incremento di x

PRINT " I = " ; I  ' comanda la presentazione del valore finale di I , corrispondente al calcolo
                   ' approssimato dell'integrale definito di f(x)
```

L'impiego di questo programma è mostrato nel paragrafo seguente .

7.5 Il calcolo di un integrale definito mediante programma in Qbasic

Applichiamo il programma compilato nel paragrafo 7.4 per il calcolo approssimato dell'integrale definito relativo alla funzione integrata analiticamente nel paragrafo 7.2; in questo modo si potranno confrontare i risultati dei due diversi sistemi di calcolo:
La funzione da integrare è

$$y = x^2$$

nell'intervallo della x compreso tra $a = 0$ e $b = 10$.
Si deve ricordare che dall'entità dell'incremento (s) dipende la bontà dell'approssimazione della sommatoria all'integrale definito; più è piccolo (s) minore è l'errore di calcolo che il programma commette, naturalmente valori molto piccoli di (s) richiedono tempi di elaborazione di macchina sensibili e ricorso a calcoli in doppia precisione. Vedremo che nel nostro esempio, con valori di s =.001, i risultati del calcolo a precisione singola sono molto buoni; ciò dipende dal numero dei prodotti che concorrono alla sommatoria. Infatti con il campo di variabilità di x tra 0 e 10 ed s =.001 si hanno (10 - 0) / .001 = 10000 punti di calcolo.
Con questi elementi completiamo il programma citato:

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a= " ; a ' richiesta di ingresso valore inferiore del campo di variabilità della x

INPUT " b= " ; b ' richiesta di ingresso valore superiore del campo di variabilità della x

INPUT " s= " ; s ' richiesta di ingresso valore sostituto dell'infinitesimo ed incremento di x

FOR x = a TO b STEP s ' impone che la variabile indipendente (x) inizi il calcolo assumendo il
                      ' valore (a) , quando l'esecuzione del programma giunge alla istruzione
                      ' NEXT, il programma ritorna all'istruzione FOR che incrementa x del
                      ' valore (s) . Il ciclo si ripete con incrementi di (s) per arrestarsi
                      ' quando il valore di x ha raggiunto il valore (b)
Y = x ^ 2  ' funzione da integrare

P = s * Y  ' prodotto della funzione per il sostituto s dell'infinitesimo

I = P + I  ' somma al valore di I in memoria ( uguale a zero all'inizio) il primo valore di P , e
           ' sostituisce in memoria il valore di I=0 con il valore di I=P , dopo la prima istruzione
           ' NEXT, x si incrementa d i ( s ) e di conseguenza si ha un cambiamento di P; il valore
           ' di I in memoria si aggiorna sommandosi al nuovo valore di P, le somme si ripetono
           ' con ulteriori aggiornamenti del valore di I in memoria fino a quando x raggiunge il
           ' valore (b) dell'estremo superiore del campo di variabilità

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR per un successivo incremento di x
```

&

PRINT " I = " ; I ' comanda la presentazione del valore di I

F5

a= ? 0
b= ? 10
s= ? .001
I = 333.270

F5

Se confrontiamo il valore di I ottenuto dal programma I = 333.270 con il risultato ottenuto in precedenza per via analitica (I = 333.333) riscontriamo un errore per difetto pari a 333.333 / 333.270 = 1.000189 dell'ordine di circa 2 su 10000 che è irrilevante.
Se si ripete il computo con s =.01 (pari a 1000 punti di calcolo) si riscontra un errore dell' 1.5‰.
Se si sviluppa il programma con s = .1 (pari a 100 punti di calcolo) si riscontra un errore dell' 1.5%.
Queste osservazioni devono suggerire al lettore di adattare il valore di (s) alle dimensioni del campo di variabilità della x sulla base dei risultati che si vogliono ottenere.
La computazione dell'integrale definito di una funzione data può essere ripetuta per quante coppie del campo di variabilità della x sia necessario; i risultati si hanno immediatamente dalla routine di programma; se ad esempio cambiamo il campo del calcolo precedente in a = 7; b = 9 abbiamo I = 128.652.

7.6 La potenza del programma di calcolo dell'integrale definito

L'esercizio svolto nel paragrafo 7.5 è servito, sia per iniziare questa nuova procedura di calcolo, sia per avere un'idea della precisione che il metodo è in grado di offrire. Per fare ciò ci siamo serviti di una funzione molto semplice che siamo riusciti ad integrare anche per via analitica; in generale però l'integrazione analitica presenta notevoli difficoltà anche per chi ha confidenza con l'analisi matematica. Alcune funzioni non sono facilmente integrabili mentre il programma che abbiamo sviluppato offre, con attenzioni da porre sul tipo di funzione da trattare, una potenza di calcolo sorprendente per un mezzo tanto semplice.

7.7 Applicazione del programma per il calcolo di un integrale complicato

Vogliamo dimostrare l'efficacia del programma di calcolo mediante la soluzione di un integrale definito di una funzione complicata, integrale che pone un impegnativo problema di calcolo se affrontato con i metodi dell'analisi matematica.
L'integrale in oggetto è:

$$I = \int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(\ln^2 x + \ln^3 x)}$$

il valore di I, determinato analiticamente dopo lungo ed impegnativo lavoro di elaborazione matematica, è: I = .5 + ln .75 = .2123179
Lo stesso risultato si ottiene, in pochi secondi, mediante l'applicazione del programma di calcolo nel quale andremo ad inserire la funzione da integrare:

$$y = \frac{1}{x(\ln^2 x + \ln^3 x)}$$

trasformata mediante le corrispondenze simboliche in Qbasic:

y = 1 / (x * ((LOG (x)) ^ 2 + (LOG (x) ^ 3)))

La funzione deve essere integrata tra (e = 2.71828) ed (e^2 = 7.389) con un incremento (s) tale da ottenere circa 4000 punti di calcolo:

s = .001 < (7.389 - 2.71828) / 4000

Completiamo il programma:

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a= " ; a  ' richiesta di ingresso valore inferiore del campo di variabilità della x

INPUT " b= " ; b  ' richiesta di ingresso valore superiore del campo di variabilità della x

INPUT " s= " ; s  ' richiesta di ingresso valore dell'incremento di x

FOR x = a  TO  b  STEP  s  ' impone che la variabile indipendente (x) inizi il calcolo assumendo il
                           ' valore (a) , quando l'esecuzione del programma giunge alla istruzione
                           ' NEXT, il programma ritorna all'istruzione FOR che incrementa x del
                           ' valore (s) . Il ciclo si ripete con incrementi di (s) per arrestarsi
                           ' quando il valore di x ha raggiunto il valore (b)

Y = 1 / ( x * ( ( LOG ( x ) ) ^ 2 + ( LOG ( x ) ^ 3 ) ) )  ' funzione da integrare

P = s * Y  ' prodotto della funzione per l'incremento (s) di  x

I = P + I  ' somma al valore di I in memoria ( uguale a zero all'inizio) il primo valore di P , e
           ' sostituisce in memoria il valore di I=0 con il valore di I=P , dopo la prima istruzione
           ' NEXT, x si incrementa d i ( s ) e di conseguenza varia il prodotto P; il valore
           ' di I in memoria si aggiorna sommandosi al nuovo valore di P, le somme si ripetono
           ' con ulteriori aggiornamenti del valore di I in memoria fino a quando x raggiunge il
           ' valore (b) dell'estremo del campo di variabilità

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR per un successivo incremento di x

PRINT " I = " ; I  ' comanda la presentazione del valore di I
```

F5

```
a= ? 2.71828
b= ? 7.389
s= ? .001
I = .21243
```

NB. Data la complessità della funzione da integrare ed il numero elevato dei punti di calcolo il risultato si ottiene dopo un sensibile tempo di elaborazione macchina.

F5

Se confrontiamo il valore di I ottenuto dal programma I = .21243 con il risultato ottenuto per via analitica (I = .2123179) riscontriamo un errore per eccesso pari a 0.5 ‰ , scarto generalmente più che accettabile .

7.8 Il programma di calcolo per il controllo dell'integrale indefinito

Il programma per il computo degli integrali definiti può essere utilizzato con profitto per il controllo dei risultati relativi ad integrali indefiniti di funzioni.

A volte, dopo un lungo lavoro a tavolino, si ottiene come risultato di un integrale indefinito di una funzione una espressione della quale risulta molto difficoltoso controllare l'esattezza formale; con l'ausilio del programma di calcolo è possibile effettuare un controllo indiretto della validità dell'integrazione eseguita.

Se ad esempio si suppone di aver calcolato l'integrale indefinito della funzione

$$y = \text{Arctang}\,(x)^{1/2} \qquad \text{(funzione integranda)}$$

ottenendo il seguente risultato:

$$I = \int \text{Arctang}\,(x)^{1/2}\,dx = (x+1)\,\text{Arctang}\,(x)^{1/2} - (x)^{1/2} + C \quad \text{(funzione integrale)}$$

possiamo verificare la correttezza dello sviluppo computando, in un intervallo scelto a piacere, il valore del corrispondente integrale definito, sia manualmente con la funzione integrale, sia con il programma di calcolo con la funzione integranda; se i due metodi di calcolo porteranno a risultati praticamente uguali potremo ritenere corretta la funzione integrale ottenuta.

Vediamo come procedere alla verifica:

stabiliamo un intervallo di integrazione con $a = 0$ e $b = 1$

se impieghiamo la funzione integrale per il calcolo dell'integrale definito tra 0 ed 1 abbiamo:

$I = (2\ \text{Arctang}\ 1 - 1) - (\text{Arctang}\ 0 - 0) = .5707$

se impieghiamo il programma di calcolo con la funzione integranda questa deve essere scritta in simbologia Qbasic:

$$y = \text{ATN (SQR (x))}$$

dato poi che l'intervallo di integrazione è $(1 - 0) = 1$, per ottenere 10000 punti di calcolo si deve porre $s = .0001$, avremo perciò:

```
CLS ' pulisce lo schermo

INPUT " a= "  ;  a   ' richiesta di ingresso valore inferiore del campo di variabilità della x

INPUT " b= "  ;  b   ' richiesta di ingresso valore superiore del campo di variabilità della x

INPUT " s= "  ;  s   ' richiesta di ingresso valore dell'incremento di x

FOR  x = a   TO  b  STEP  s   ' impone che la variabile indipendente (x) inizi il calcolo assumendo il
                              ' valore (a) , quando l'esecuzione del programma giunge alla istruzione
                              ' NEXT, il programma ritorna all'istruzione FOR che incrementa x del
                              ' valore (s) . Il ciclo si ripete con incrementi di (s) per arrestarsi
                              ' quando il valore di x ha raggiunto il valore (b)

Y = ATN ( SQR ( x ) )  ' funzione da integrare

P = s * Y   ' prodotto della funzione per l'incremento (s) di x

I = P + I   ' somma al valore di I in memoria ( uguale a zero all'inizio) il primo valore di P , e
            ' sostituisce in memoria il valore di I=0 con il valore di I=P , dopo la prima istruzione      &
```

```
' NEXT , x si incrementa d i ( s ) e di conseguenza cambia il prodotto P; il valore
' di I in memoria si aggiorna sommandosi al nuovo valore di P, le somme si ripetono
' con ulteriori aggiornamenti del valore di I in memoria fino a quando x raggiunge il
' valore (b) dell'estremo del campo di variabilità

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR per un successivo incremento di x

PRINT " I = " ; I ' comanda la presentazione del valore di I
```

F5

```
a= ? 0
b= ? 1
s= ? .0001
I = . 5707569
```

F5

Dai due diversi modi di computazione risultano valori di I molto vicini tra loro, ciò significa che il calcolo dell'integrale indefinito ha portato ad un risultato corretto.

7.9 Sulle discontinuità delle funzioni da integrare

Prima di chiudere questo argomento è indispensabile ricordare al lettore che alcune funzioni matematiche a carattere "discontinuo" non possono essere integrate senza alcuni accorgimenti che, escludendo le discontinuità, consentano al programma di lavorare correttamente.
Una funzione discontinua di seconda specie, ad esempio, presenta la discontinuità nell'intorno di valori positivi e/o negativi di x infinitamente piccoli, tali valori, se non opportunamente esclusi, portano il Qbasic a denunciare **Divisione per zero** e il programma di calcolo si blocca.
Se la funzione da integrare non è notoriamente continua nell'intervallo considerato è necessario eseguire un controllo, prima di procedere all'integrazione, per accertarsi delle sue caratteristiche e adottare alcune precauzioni.
Vediamo come operare se una funzione è discontinua (discontinuità di seconda specie); prendiamo in esame l'espressione:

$$y = \frac{1}{x - 1}$$

la discontinuità di questa funzione è evidente; quando x tende a 1 per x < 1 la funzione tende ad meno infinito, quando x tende a 1 per x > 1 la funzione tende a più infinito. Se la funzione deve essere integrata in un campo di variabilità che non contiene l'ascissa x = 1, per la quale nasce la discontinuità, il programma di calcolo può essere applicato normalmente. La funzione può essere integrata ad esempio tra 0 e .7; tra 1.5 e 4; ecc.. dato che in questi intervalli non è compreso il valore x = 1.
Se invece c'è l'esigenza di calcolare l'integrale tra 0 ed 1 è d'obbligo ridurre l'intervallo tra 0 e (1-i) in questo modo si evita la discontinuità e l'errore che si commette è tanto più piccolo quanto è piccolo i .
Se invece si deve calcolare l'integrale in un intervallo che contiene il punto di discontinuità, per esempio tra .5 e 1.5, si deve dividere l'intervallo in due parti, la prima tra .5 e (1 - i), la seconda tra (1 + i) e 1.5, per ciascun intervallo deve essere eseguito il computo a programma ed il valore complessivo dell'integrale sarà dato dalla somma dei due integrali parziali. Il computo sarà tanto più preciso quanto i sarà piccolo.

7.10 Integrazione delle funzioni di tabella

E' di notevole importanza pratica l'integrazione delle funzioni di tabella, questo calcolo dà modo di ricavare preziosi elementi di sintesi dalla matrice che altrimenti non sarebbero utilizzabili.
Nel capitolo 3, paragrafo 3.29, abbiamo trattato delle matrici di tipo permanente, qui invece tratteremo delle matrici di tipo volatile che meglio si prestano alle operazioni di integrazione secondo il programma di calcolo introdotto nel paragrafo 7.4.
L'impostazione di una matrice di tipo volatile richiede un semplice programma in Qbasic che andiamo di seguito a compilare e commentare:

```
DIM a ( 255 )  ' fissa il numero massimo degli elementi  che devono formane la matrice volatile

INPUT "M="  ;  M  ' chiede all'operatore quanti sono gli elementi della matrice

FOR  x = 1 TO  M  ' imposta la richiesta  automatica degli  M  valori di a(x) con i quali si deve
                  ' costruire la matrice volatile

PRINT "a"  ;  x  ' stampa il simbolo dell'elemento di matrice con accanto il valore di x scandito
                 ' dall'istruzione FOR  , ad esempio   a 5  ,che indica il quinto elemento della matrice

INPUT a( x )  ' chiede all'operatore l'introduzione del valore dell'elemento di matrice individuato
              ' nell'istruzione precedente , ad esempio se  a 5  = . 35 si ha  :   a5      ? .35

NEXT x    ' rimanda all'istruzione FOR x = ... per la prosecuzione dell'introduzione di tutti gli M
          ' elementi della matrice

FOR  x = 1  TO  M  ' dopo l'introduzione di tutti gli elementi della matrice procede a richiamarli per
                   ' la loro utilizzazione sotto forma di funzione di matrice

y =  a ( x )  ' funzione di matrice da utilizzare per l'integrazione

NEXT x  ' rimanda alla seconda istruzione FOR x = ..per esplorare tutti gli elementi della matrice
```

Visto come organizzare una funzione di matrice è necessario trattare dell'integrale definito di questo tipo di funzioni che può seguire diverse regole di impostazione; la regola più semplice, che noi adotteremo, è detta dei trapezi; essa prevede il calcolo dell'integrale definito mediante la formula:

$$I = (.5\, a(1) + a(2) + a(3) + ... + a(M - 1) + .5\, a(M)) (f - i) / (M-1)$$

in cui a(1); a(2) ..; a(M) sono gli M elementi che compongono la matrice, i ed f sono rispettivamente l'inizio e la fine dell'intervallo entro il quale sono stati rilevati gli elementi stessi; un esempio chiarirà quanto detto:
Se consideriamo un arco della parabola $Y = X^2$ nell'intervallo della X compreso tra 1 e 6 e andiamo a rilevarne 6 valori per formare una tabella abbiamo:

X	Y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

da questa tabella possiamo passare alla funzione di matrice soltanto cambiando i simboli delle variabili, al posto della variabile indipendente X si scrive la lettera x al posto della variabile indipendente Y si scrive il simbolo a(x).

x	a(x)	Questa è una funzione di matrice in cui:	
1	1	a(1) = 1	
2	4	a(2) = 4	
3	9	a(3) = 9	definita nell'intervallo 1; 6 in cui sono
4	16	a(4) = 16	stati ricavati gli elementi ;
5	25	a(5) = 25	sarà quindi inizio i = 1
6	36	a(6) = 36	fine f = 6

Data la formula per il calcolo dell'integrale definito e chiariti gli aspetti formali della funzione di matrice compiliamo e commentiamo la nuova struttura del programma necessario al computo dell'integrale stesso; il programma impiega l'istruzione condizionata **IF** in cascata mai utilizzata prima, questa si presenta nella forma:

IF x = 1 **THEN** k = .5 **ELSE IF** x = M **THEN** k = .5 **ELSE** k = 1

da cui il programma:

```
CLS  ' pulisce lo schermo

DIM a( 6 )  ' stabilisce il numero degli elementi della matrice volatile

INPUT "i=" ; i  ' chiede l'introduzione del valore iniziale dell'intervallo in cui sono stati ricavati gli
                ' elementi di matrice (i = inizio)

INPUT "f=" ; f  ' chiede l'introduzione del valore finale dell'intervallo (f = fine)

INPUT "M=" ; M  ' chiede il numero degli elementi che compongono la matrice

FOR x = 1 TO M  ' imposta la richiesta automatica degli M valori di a(x)con i quali si deve
                ' costruire la matrice volatile

PRINT "a" ; x  ' stampa il simbolo dell'elemento di matrice con accanto il valore di x scandito
               ' dall'istruzione FOR , ad esempio a 5 ,che indica il quinto elemento della matrice

INPUT a( x )  ' chiede all'operatore l'introduzione del valore dell'elemento di matrice individuato
              ' nell'istruzione precedente mediante la presentazione del simbolo ( ? )

NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x =... per la prosecuzione dell'introduzione di tutti gli M
        ' elementi della matrice

FOR x = 1 TO M  ' dopo l'introduzione di tutti gli elementi della matrice procede a richiamarli per
                ' la loro utilizzazione sotto forma di funzione di matrice

IF x = 1 THEN k = .5 ELSE IF x = M THEN k = .5 ELSE k = 1
                ' istruzione che condiziona il primo e l'ultimo elemento della matrice,
                ' moltliplicandoli per k = . 5 così come prevede la formula dei trapezi

y = a( x )  ' funzione di matrice per il calcolo dell'integrale

P = k * y * ( f - i ) / ( M -1 )  ' calcolo del singolo addendo dell'integrale secondo la formula dei trapezi

E = P + E  ' somma al valore di E in memoria ( uguale a zero all'inizio) il primo valore di P , e
           ' sostituisce in memoria il valore di E=0 con il valore di E=P , dopo la prima istruzione     &
```

```
' NEXT x si ha l'introduzione a calcolo del secondo elemento di matrice di conseguenza
' cambia anche il valore di P, si ha un  aggiornamento di E in memoria  con la somma
' di  E  al nuovo valore di P, le somme si ripetono
' con ulteriori aggiornamenti del valore di E in memoria fino a quando x raggiunge
' il valore M relativo all'ultimo elemento della matrice

NEXT x   ' rimanda alla seconda istruzione FOR per la scansione della matrice

PRINT "I ="  ;  E   ' presenta il valore  I = E dell'integrale definito della funzione matrice
```

E' molto interessante procedere ora al calcolo dell'integrale definito della funzione di tabella che abbiamo costruito con i dati ricavati dalla parabola:

```
                F5
i= ?  1
f= ? 6
M= ? 6
a1
? 1
a2
? 4
a3
? 9
a4
? 16
a5
? 25
a6
? 36
I = 72.5

                F5
```

Il computo ci ha fornito un valore dell'integrale definito pari a $I = 72.5$; dato che la funzione di matrice è stata ricavata dalla funzione parabola è significativo il confronto tra il valore di I, calcolato utilizzando soltanto sei punti della funzione originale, e l'integrale definito della funzione originale che, calcolato analiticamente, fornisce $I = 71.666$; come si vede l'errore commesso utilizzando la funzione matrice è dello 1.16 % in eccesso, risultato molto soddisfacente.
I valori che abbiamo inserito nella matrice, essendo quest'ultima di tipo volatile, si perdono naturalmente quando il programma viene salvato nella memoria del P.C. Dovranno pertanto essere reinseriti uguali o diversi valori di matrice per ulteriori impieghi della routine di calcolo.