CAPITOLO 6
DERIVATE DI FUNZIONI

L'argomento sviluppato in questo capitolo è relativo al calcolo ed alla presentazione grafica delle derivate di funzioni; si imposta e si risolve, mediate Qbasic, la forma analitica delle derivate sulla base della semplice definizione del rapporto incrementale.

6.1 La definizione di derivata di una funzione

E' noto che viene definita derivata di una funzione $y = f(x)$ il limite del rapporto incrementale

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

il calcolo del limite è applicabile, in via di principio, a qualsiasi funzione $f(x)$ che abbia caratteristiche di continuità; in pratica l'espressione è utilizzata prevalentemente nei libri di testo per dimostrazioni di principio che conducono a regole di calcolo applicative che di fatto non implicano lo sviluppo del limite sopra indicato.
Elenchi di derivate delle funzioni più comuni e di formule di derivazione sono disponibili come supporto per agevolare le operazioni di calcolo infinitesimale. Non sempre però il calcolo della derivata di una funzione è facilmente affrontabile con i mezzi matematici a disposizione, in alcuni casi, con funzioni complicate, l'operazione è difficoltosa.
Con l'ausilio del Qbasic si può determinare, numericamente, la derivata di qualsiasi funzione con estrema semplicità; questo tipo di elaborazione è illustrato nel paragrafo seguente.

6.2 La routine per il calcolo della derivata di una funzione

Il procedimento per il calcolo della derivata di una funzione, implementabile in Qbasic, si basa sulla definizione di rapporto incrementale riportata nel paragrafo 6.1.
L'operazione al limite viene sostituita, con buona approssimazione, da una serie di rapporti per valori di h molto piccoli, computati in un intervallo stabilito della variabile indipendente.
Si ha perciò che il calcolo del rapporto:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eseguito per n valori di x compresi nell'intervallo di variabilità da x1 a x2, assumendo $h = 1 / 1000000$, fornisce l'andamento approssimato della funzione derivata.
Il rapporto incrementale per il computo della derivata di una generica funzione viene implementato in Qbasic in doppia precisione come segue:

```
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSI per 4 quadranti

LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )

LOCATE 15, 66: INPUT "x1=" ; x1   ' richiesta ingresso estremo inferiore campo di variabilità

LOCATE 16, 66: INPUT "x2=" ; x2   ' richiesta ingresso estremo superiore campo di variabilità        &
```

```
FOR  x = x1  TO  x2  STEP  ( x2 - x1 ) / 1000 ' definizione campo ed incremento di calcolo

h = 1 / 1000000   ' si fissa il valore di h per il calcolo del rapporto incrementale

yo# = f( x )  ' funzione originale in (x)

yi# = f( x + h )  ' funzione incrementata in (x+h)

yr# = ( yi# - yo# ) / h  ' calcolo del rapporto incrementale ( derivata di f(x) )

PSET ( 230 + k * x , 160 - k2 * yr# )  ' presentazione grafico f '(x)

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = per il calcolo dei 1000 punti di f '(x)
```

6.3 Esercitazioni elementari di derivazione e precisione di calcolo

Come si è osservato il programma compilato nel paragrafo 6.2 è molto semplice, i risultati che si ottengono sono però interessanti.
Proponiamoci ad esempio il calcolo della derivata della funzione y = Sen x anche se tale operazione non è necessaria essendo scontato che y' = Cos x
-si fissa il campo di variabilità della x da x1 = - 3.14 a x2 = 3.14
-si calcola il valore di k per l'istruzione PSET k = 230 / 3.14 = 73.25
-si calcola il valore di k2 per l'istruzione PSET k2 = 160 / 1 = 160

si compila il programma

```
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSI 4 quadranti

LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )

LOCATE 15, 66: INPUT "x1=" ; x1  ' richiesta ingresso estremo inferiore campo di variabilità

LOCATE 16, 66: INPUT "x2=" ; x2  ' richiesta ingresso estremo superiore campo di variabilità

FOR  x = x1  TO  x2  STEP  ( x2 - x1 ) / 1000 ' definizione campo ed incremento di calcolo

h = 1 / 1000000   ' si fissa il valore di h per il calcolo del rapporto incrementale

yo# = SIN ( x )  ' funzione originale in (x)

yi# = SIN ( x + h )  ' funzione incrementata in (x+h)

yr# = ( yi# - yo# ) / h  ' calcolo del rapporto incrementale ( derivata di f(x) )

PSET ( 230 + 73.25 * x , 160 - 160 * yr# )  ' presentazione grafico f '(x)

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = per il calcolo dei 1000 punti di f '(x)
```

F5

x1= ? -3.14
x2= ? 3.14

dopo l'introduzione di x2 si ha la presentazione video della funzione derivata così come illustrato in figura 28. La curva, a tratto bianco, mostra chiaramente che l'andamento della derivata è, come ci attendevamo, una funzione cosinusoidale, può restare però il dubbio che il profilo non segua esattamente la legge y' = Cos x a causa dell'approssimazione di calcolo insita nel programma.

La funzione da derivare che abbiamo scelto consente un efficace controllo del grafico ottenuto dalla routine di programma dato che il risultato deve essere la funzione y' = Cos x che è facilmente tracciabile assieme alla curva calcolata.

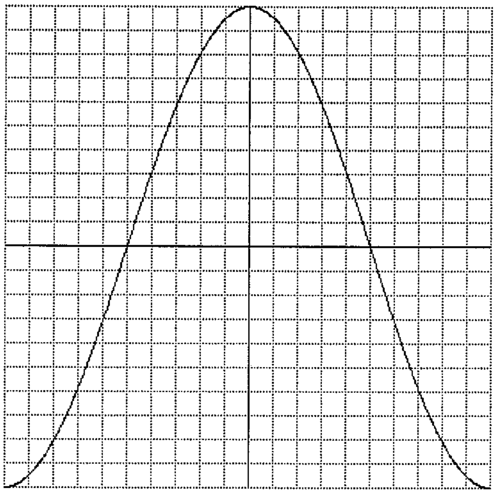

Figura 28
Grafico derivata funzione Sen x
nel campo x1 = -3.14 x2 = 3.14
Scala asse x = .314 rad./div.
Scala asse y = .1/div.

Se aggiungiamo al programma, dopo l'istruzione PSET esistente, una nuova istruzione PSET così strutturata:

PSET (230 + 73.25 * x , 160 - 160 * COS (x)),14 'presentazione grafico teorico della f '(x)

e ripetiamo l'esercizio, abbiamo il confronto grafico tra la f '(x) calcolata e la f '(x) teorica.

F5

x1= ? - 3.14
x2= ? 3.14

Dopo l'introduzione del valore di x2 si ha un nuovo tracciato in cui compare una sola curva cosinusoidale in giallo, ciò è la dimostrazione che il procedimento di calcolo sviluppato a programma conduce ad una funzione che è praticamente sovrapponibile a quella teorica con errori di approssimazione del tutto trascurabili.

Un secondo esempio per il controllo della precisione di calcolo è facilmente realizzabile mediante il calcolo della derivata di

$$y = e^x$$

che come è noto coincide con la funzione stessa $y' = e^x$:

-si fissa ad esempio il campo di variabilità della x da x1 = -1 a x2 = 1
-si calcola il valore di k per l'istruzione PSET k = 230 / 1 = 230
-si calcola il valore di k2 per l'istruzione PSET k2 = 160 / e = 58.86
compiliamo il programma:

```
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSI per 4 quadranti

LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )

LOCATE 15, 66: INPUT "x1=" ; x1 ' richiesta ingresso estremo inferiore campo di variabilità

LOCATE 16, 66: INPUT "x2=" ; x2 ' richiesta ingresso estremo superiore campo di variabilità

FOR x = x1 TO x2 STEP ( x2 - x1 ) / 1000 ' definizione campo ed incremento di calcolo

h = 1 / 1000000 ' si fissa il valore di h per il calcolo del rapporto incrementale

yo# = EXP ( x ) ' funzione originale in (x)

yi# = EXP ( x + h ) ' funzione incrementata in (x+h)

yr# = ( yi# - yo# ) / h ' calcolo del rapporto incrementale ( derivata di f(x) )

PSET ( 230 + 230 * x , 160 - 58.86 * yr# ) ' presentazione grafico f '(x) calcolato

PSET ( 230 + 230 * x , 160 - 58.86 * yo# ),14 ' presentazione grafico f '(x) teorico

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = per il calcolo dei 1000 punti di f '(x)
```

F5

x1= ? - 1
x2= ? 1

dopo l'introduzione di x2 si ha la presentazione del grafico di figura 29 in cui è tracciata una sola curva, anche in questo caso il grafico della funzione derivata calcolata è perfettamente sovrapposto al grafico della derivata teorica.

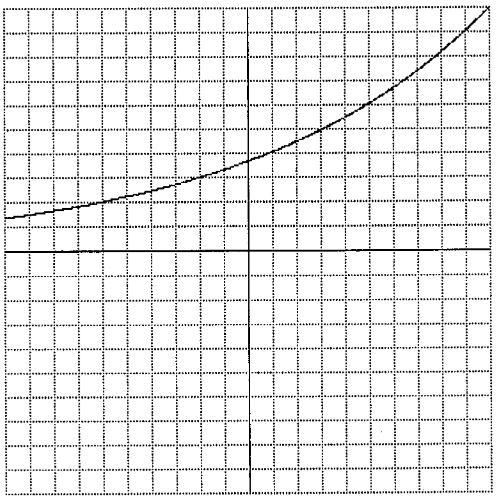

Figura 29
Grafico funzione derivata di $y = e^x$
comparato con y '
Scala asse x = .1 / div.
Scala asse y = .271 / div.

6.4 Esercizio generico di calcolo

Per chiudere questo capitolo è utile eseguire un ultimo esempio di computazione nel caso in cui la funzione da derivare abbia una espressione complicata, naturalmente questo esercizio non permette il controllo del risultato non conoscendo a priori la derivata teorica; si avrà la certezza del risultato in virtù di quanto è già stato dimostrato nel paragrafo precedente.

Sia data la funzione:

$$y = (1/3)\ \ln \frac{3\,\mathrm{Tang}(x/2) - 2}{2\,\mathrm{Tang}(x/2) + 3}$$

se ne voglia calcolare la derivata nell'intervallo compreso tra 1.5 e 3 radianti per lavorare in un tratto continuo e di validità della funzione; la corrispondenza simbolica della funzione in Qbasic è:

y = (1/3) * LOG((3 * TAN (x / 2) -2) / (2 * TAN (x / 2) + 3))

posto
x1 = 1.5 ; x2 = 3
per l'istruzione PSET si calcolano
k = 230 / 3 = 76.6 (per avere scala asse x = .3 / div.)
k2 = 160 / 2 = 80 (per avere scala asse y = .2 / div.)
si compila il programma

```
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSI per 4 quadranti

LINE ( 230, 0 )-( 230, 320 )

LOCATE 15, 66: INPUT "x1=" ; x1 ' richiesta ingresso estremo inferiore campo di variabilità

LOCATE 16, 66: INPUT "x2=" ; x2 ' richiesta ingresso estremo superiore campo di variabilità

FOR x = x1 TO x2 STEP ( x2 - x1 ) / 1000 ' definizione campo ed incremento di calcolo

h = 1 / 1000000 ' si fissa il valore di h per il calcolo del rapporto incrementale

yo# = ( 1/3 ) * LOG( ( 3 * TAN ( x / 2 ) -2 ) / ( 2 * TAN ( x / 2 ) + 3 ) ) ' funzione originale in (x)

yi# = ( 1/3 ) * LOG( ( 3 * TAN ( ( x+h ) / 2 ) -2 ) / ( 2 * TAN ( ( x+h ) / 2 ) + 3 ) ) ' funzione incrementata

yr# = ( yi# - yo# ) / h ' calcolo del rapporto incrementale ( derivata di f(x) )

PSET ( 230 + 76.6 * x , 160 - 80 * yr# ) ' presentazione grafico f '(x) calcolato

NEXT x ' rimanda all'istruzione FOR x = per il calcolo dei 1000 punti di f '(x)
```

F5

x1= ? 1.5
x2= ? 3

dopo l'introduzione di x2 si ha la presentazione della funzione derivata così come è mostrato in figura 30 in cui è tracciata la curva che si sviluppa nel primo quadrante tra x1 = 1.5 ed il fondo scala x2 = 3.

Come abbiamo visto l'operazione di derivazione numerica e di presentazione grafica di una funzione è cosa molto agevole, si deve soltanto prestare attenzione nel fissare il campo di variabilità della x che deve assicurare alla f(x) sia la continuità che la validità.

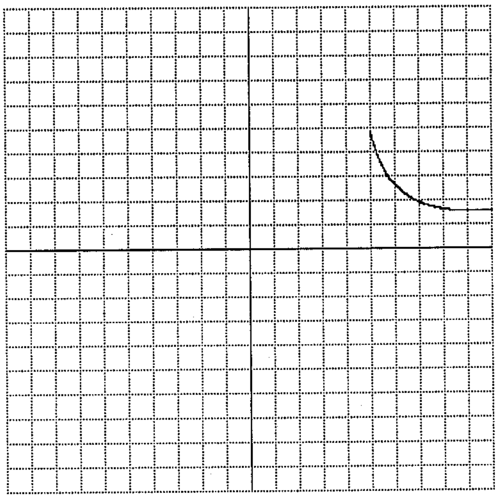

Figura 30
Grafico derivata della funzione data
Scala asse x = .3 / div.
Scala asse y = .2 / div.