CAPITOLO 10
I POLINOMI DI BUTTERWORTH E DI CHEBYCHEV E LE LORO TRASFORMAZIONI

In molti studi di carattere tecnico vengono utilizzati alcuni algoritmi che vanno sotto il nome di polinomi di Butterworth e di Chebychev.
Questi algoritmi, grazie alle loro doti di trasformabilità, si possono impiegare come strutture di mascheramento, strutture in grado di bloccare lo sviluppo di altre funzioni in un qualsiasi intervallo stabilito dell'asse delle ascisse.
I polinomi sono funzioni parametriche implementabili in Qbasic al fine di consentirne il tracciamento degli andamenti, sia per la valutazione della scelta fatta sui parametri, sia per l'eventuale aggiustaggio degli stessi onde ottenere i profili desiderati delle curve .

10.1 Il polinomio di Butterworth

La caratteristica del profilo del polinomio di Butterworth è dovuta al particolare comportamento della sua funzione che forma una sorta di gradino a scendere, la parte alta della pedata inizia da $x = 0$ e resta elevata per un tratto, per poi decrescere rapidamente, da un certo valore di x in poi, a livelli molto piccoli.
Il polinomio di Butterwort è espresso mediante la funzione parametrica normalizzata:

$$y = \frac{1}{\left[\ 1 + (x\ /\ xt)^{2n}\ \right]^{1/2}}$$

in cui

x = variabile indipendente

xt = parametro di taglio del polinomio

n = ordine del polinomio o parametro di pendenza

Nell'intervallo compreso tra $x = 0$ e $x << xt$ si ha $y = 1$.
Il valore del parametro xt stabilisce l'ascissa per la quale la funzione si riduce dal valore massimo 1 al valore .707.
Più è elevato il valore di xt più si allontana il tratto decrescente della funzione dall'origine degli assi.
Più è piccolo il valore di xt più si avvicina il tratto decrescente della funzione all'origine degli assi.
Il valore del parametro n governa la pendenza del tratto di curva decrescente.
Più è elevato il valore di n maggiore è la pendenza del tratto discendente della funzione.
Più è piccolo il valore di n minore è la pendenza del tratto discendente della funzione.
Come si comprende dalle definizioni dei parametri, l'andamento del polinomio di Butterworth è totalmente dipendente da questi che possono essere opportunamente dimensionati per ottenere la variazione della funzione e il corrispondente profilo della curva che la rappresenta, in base alle necessità di impiego.
Nella compilazione del programma dovrà essere prevista l'introduzione del valore massimo (x max) che si desidera assegnare al campo della variabile indipendente.
L'implementazione del polinomio in Qbasic si ottiene facilmente con l'espressione:

y = 1 / (SQR(1 + (x / xt) ^ (2 * n)))

e da questa è immediata la compilazione del programma commentato per il tracciamento del grafico corrispondente:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )          ' ASSE Y   2 quadranti
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )   ' ASSE X  2 quadranti
LOCATE 8, 66 : PRINT "xt"   ' indica il parametro xt da introdurre
LOCATE 9, 66 : INPUT xt   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato
LOCATE 10, 66 : PRINT "x max"   ' indica il valore massimo della variabile indip. che si vuole presentare
LOCATE 11, 66 : INPUT xm   ' con il simbolo ? chiede il valore di x max sopra indicato
LOCATE 12, 66 : PRINT "n"   ' indica il parametro n da introdurre
LOCATE 13, 66 : INPUT n   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato

FOR x = 0 TO xm STEP ( xm / 1000 )   ' gestisce il campo ed il passo della variabile indipendente x
y = 1 / ( SQR( 1 + ( x / xt ) ^ ( 2 * n ) ) )   ' calcola i punti della funzione
PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * y ), 14 ' presenta la curva della funzione con le ascisse normalizzate
NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x ... per il calcolo dei punti successivi
```

Iniziamo a lavorare con il programma con l'intento di conoscere l'andamento grafico di un polinomio di Butterworth di ordine n = 5, per xt = 10 e x max = 20

```
F5
                    xt
                    ? 10
                    x max
                    ? 20
                    n
                    ? 5
```

dopo l'introduzione del valore di n si ha la presentazione della curva mostrata in figura 49.
La figura mostra chiaramente la particolare caratteristica di questo tipo di funzioni; il valore di y resta a livello 1 da x = 0 a x < xt, per x = xt si ha y = .707, per valori di x di poco superiori a xt la funzione decresce rapidamente per poi tendere allo zero per x >> xt.

Se si desidera spostare il tratto pendente della curva verso l'origine degli assi, ad esempio per xt = 7, si ripete la routine di calcolo con il nuovo valore di xt e gli originali valori di n e x max.
Se si vuole invece aumentare la pendenza della curva nel tratto discendente si ripete nuovamente la routine con un nuovo valore di n, ad esempio n = 8, e gli originali valori di xt e x max.
Queste semplici operazioni rendono l'idea della facilità di cambiamento dei parametri del polinomio per adattarlo al meglio alle personali esigenze di lavoro.

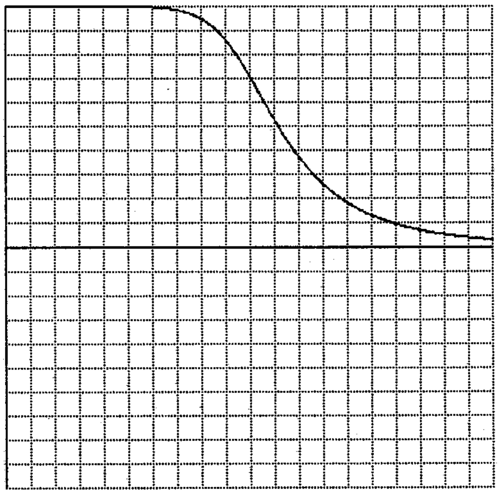

Figura 49
Andamento del polinomio di Butterworth per xt =10, n = 5
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 1/div.

10.2 La trasformazione simmetrica del polinomio di Butterworth

Il polinomio di Butterworth permette una trasformazione che rovescia l'andamento della funzione rendendo il profilo simmetrico rispetto all'originale.
La caratteristica della trasformazione del polinomio di Butterworth forma una sorta di gradino a salire da livelli molto piccoli di y, che iniziano da x = 0, per poi crescere rapidamente, da un certo valore di x in poi, a livello unitario.
La trasformazione consiste nel cambiare la base della potenza da (x / xt) a (xt / x), si ottiene così una nuova funzione come sotto riportato:

$$y = \frac{1}{\left[1 + (xt / x)^{2n} \right]^{1/2}}$$

in cui

x = variabile indipendente
xt = parametro di taglio del polinomio
n = ordine del polinomio o parametro di pendenza

Nell'intervallo compreso tra x = 0 e x << xt si hanno valori di y molto piccoli.
Il valore del parametro xt stabilisce l'ascissa per la quale la funzione si è incrementata dal valore minimo al valore .707.
Più è elevato il valore di xt più si allontana il tratto crescente della funzione dall'origine degli assi.
Più è piccolo il valore di xt più si avvicina il tratto crescente della funzione all'origine degli assi.

Il valore del parametro n governa la pendenza del tratto di curva crescente.
Più è elevato il valore di n maggiore è la pendenza del tratto ascendente della funzione.
Più è piccolo il valore di n minore è la pendenza del tratto ascendente della funzione.
Questa funzione ha un punto critico per x = 0 dato che in tal caso il rapporto xt/x è infinitamente grande; di ciò si deve tenere conto nella strutturazione del nuovo programma che andremo a compilare .
L'importanza di questa versione del polinomio di Butterworth è pari alla configurazione originale.
Il programma per il tracciamento della funzione è simile al precedente ed è così strutturato:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )        ' ASSE  Y  2 quadranti

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSE  X  2 quadranti

LOCATE 8, 66 : PRINT "xt"  ' indica il parametro xt da introdurre

LOCATE 9, 66 : INPUT xt   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato

LOCATE 10, 66 : PRINT "x max"  ' indica il valore massimo della variabile indip. che si vuole presentare

LOCATE 11, 66 : INPUT xm   ' con il simbolo ? chiede il valore di x max sopra indicato

LOCATE 12, 66 : PRINT "n"   ' indica il parametro n da introdurre

LOCATE 13, 66 : INPUT n   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato

FOR  x = .0001  TO  xm  STEP  ( xm / 1000 )  ' gestisce il campo ed il passo della variabile
                                             ' indipendente escludendo da esso il valore x=0

y = 1 / ( SQR( 1 + ( xt / x ) ^ ( 2 * n ) ) )  ' calcola i punti della funzione

PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * y ), 14  ' presenta la curva della funzione con le ascisse normalizzate

NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x ... per il calcolo dei punti successivi
```

Proviamo il nuovo programma per visualizzare l'andamento grafico della funzione con i dati del polinomio originale: n = 5, per xt = 10 e x max = 20

```
F5

                        xt
                        ? 10
                         x max
                        ? 20
                        n
                        ? 5
```

dopo l'introduzione del valore di n si ha la presentazione della curva mostrata in figura 50.
Il grafico mostra la curva simmetrica di quella riportata in figura 49; il valore di y resta a livello molto basso per valori di x << xt, per valori di x di poco inferiori a xt la curva cresce rapidamente per giungere al livello y = .707 per x = xt, per valori di x > xt la funzione assume il valore 1.
Qualsiasi cambiamento del profilo della curva è possibile mediante opportuna variazione dei parametri.

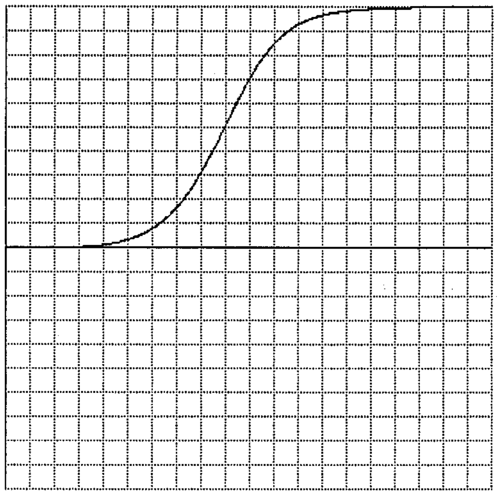

Figura 50
Andamento del polinomio di Butterworth trasformato simmetrico
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 1/div.

10.3 La doppia trasformazione del polinomio di Butterworth

E' di estremo interesse la trasformazione del polinomio di Butterworth che permette di ottenere una funzione a doppio scalino, a salire per valori di $x < x1$ ed a scendere per valori di $x > x2$, dove x1 ed x2 sono di seguito specificati.
Questa nuova funzione si ottiene dalla trasformazione della base della potenza da (x / xt) in $((x / xo) - (xo / x))$ come è riportato dall'espressione:

$$y = \frac{1}{\left[\,1 + (\,(x / xo) - (xo / x)\,)^{2n}\,\right]^{1/2}}$$

in cui

x = variabile indipendente

xo = x1 / .618 = x2 / 1.618 = parametro di taglio del polinomio

n = ordine del polinomio o parametro di pendenza

Per $x \ll x1$ si hanno valori di y molto piccoli.
Nell'intervallo compreso tra x1 e x2 si hanno i valori più elevati di y.
Per $x \gg x2$ si hanno valori di y molto piccoli.
Il valore del parametro xo stabilisce le due ascisse, x1 ed x2, per le quali la funzione, prima in fase crescente, poi in fase decrescente, assume il valore .707.
Più è elevato il valore di xo più si allontanano i tratti crescenti, decrescenti, della funzione dall'origine degli assi.
Più è piccolo il valore di xo più si avvicinano i tratti crescenti, decrescenti della funzione all'origine degli assi.

Il valore del parametro n governa le pendenze dei tratti di curva .
Più è elevato il valore di n maggiori sono le pendenze dei tratti ascendente, discendente della funzione.
Più è piccolo il valore di n minori sono le pendenze dei tratti ascendente, discendente della funzione.
Questa funzione ha un punto critico per x = 0 dato che in tal caso il rapporto xo/x è infinitamente grande; di ciò si deve tenere conto nella strutturazione del nuovo programma che andremo a compilare .
L'implementazione del polinomio in Qbasic si ottiene con l'espressione:

```
y = 1 / ( SQR( 1 + ( ( xo / x ) - ( x / xo ) ) ^ ( 2 * n ) ) )
```

Il programma per il tracciamento della funzione è così strutturato:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )        ' ASSE Y 2 quadranti

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE X 2 quadranti

LOCATE 8, 66 : PRINT "xo"   ' indica il parametro xo da introdurre

LOCATE 9, 66 : INPUT xo   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato

LOCATE 10, 66 : PRINT "x max"   ' indica il valore massimo della variabile indip. che si vuole presentare

LOCATE 11, 66 : INPUT xm   ' con il simbolo ? chiede il valore di x max sopra indicato

LOCATE 12, 66 : PRINT "n"   ' indica il parametro n da introdurre

LOCATE 13, 66 : INPUT n   ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato

FOR x = .0001 TO xm STEP ( xm / 1000 )  ' gestisce il campo ed il passo della variabile
                                        ' indipendente escludendo da esso il valore x=0

y = 1 / ( SQR( 1 + ( ( xo / x ) - ( x / xo ) ) ^ (2 * n ) ) ) ' calcolo della funzione

PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * y ), 14   ' presenta la curva della funzione con le ascisse normalizzate

NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x ... per il calcolo dei punti successivi
```

Proviamo il programma per visualizzare l'andamento grafico della funzione a doppia trasformazione con i valori: n = 6, xo = 5 e x max = 20

F5

```
xo
? 5
x max
? 20
n
? 6
```

dopo l'introduzione del valore di n si ha la presentazione della curva mostrata in figura 51.
Il grafico mostra la nuova curva del polinomio di Butterworth con doppia trasformazione; il valore di y resta a livello molto basso per valori di x << x1 = .618 xo = 3.09, per valori di x di poco inferiori a x1 = 3.09 la curva cresce rapidamente per giungere al livello y = .707 per

$x = 3.09$, per valori di x compresi tra $x = 3.09$ e $x = x2 = 1.618\ xo = 8.09$ la y mantiene i massimi valori, per $x > x2$ la curva decresce rapidamente, per $x >> x2$ la y ritorna a livelli molto piccoli. Qualsiasi cambiamento del profilo della curva è possibile mediante opportuna variazione dei parametri.

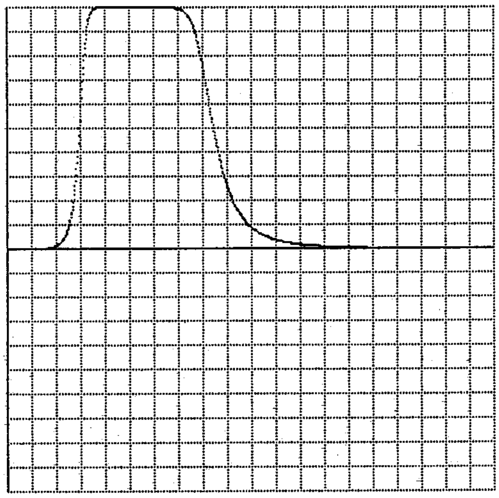

Figura 51
Andamento del polinomio
di Butterworth
doppio trasformato
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 1/div.

10.4 Sulle caratteristiche di mascheramento del polinomio di Butterworth

Abbiamo accennato che una delle caratteristiche salienti del polinomio di Butterworth è relativa alla proprietà di mascheramento di altre funzioni, mostreremo ora con un esempio tale caratteristica.
Supponiamo di dover presentare la funzione $y1 = \mathrm{Sen}\,(5x)$ in un intervallo limitato di x compreso tra $x = 0$ e $x = 8$.
Se moltiplichiamo tale funzione per il polinomio di Butterworth descritto nel paragrafo 10.1 abbiamo:

$$Y = \frac{1}{\left[\ 1 + (x\ /\ xt)^{2n}\ \right]^{1/2}}\ \mathrm{Sen}\,(5x)$$

In questa nuova funzione la parte polinomiale vale 1 da $x = 0$ a $x < xt$ e assume valori molto piccoli per $x >> xt$ mentre la parte trigonometrica oscilla tra +1 e -1, è chiaro che il prodotto darà modo alla parte trigonometrica di evidenziarsi tra $x = 0$ e $x < xt$ mentre l'attenuerà pesantemente per $x >> xt$.
E' ovvio quindi che se poniamo $xt = 8$ e assegnamo ad n un valore sensibilmente elevato, ad esempio $n = 9$, il prodotto Y risolverà il nostro problema.
L'esempio ha una logica conclusione nella presentazione grafica della funzione prodotto sulla base

dell'implementazione in Qbasic della funzione stessa:

```
Y = (1 / ( SQR( 1 + ( x / xt ) ^ ( 2 * n ) ) ) ) * SIN ( 5 * x )
```

e del suo inserimento nel programma:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )      ' ASSE Y 2 quadranti
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSE X 2 quadranti
LOCATE 8, 66 : PRINT "xt"  ' indica il parametro xt da introdurre
LOCATE 9, 66 : INPUT xt  ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato
LOCATE 10, 66 : PRINT "x max"  ' indica il valore massimo della variabile indip. che si vuole presentare
LOCATE 11, 66 : INPUT xm  ' con il simbolo ? chiede il valore di x max sopra indicato
LOCATE 12, 66 : PRINT "n"  ' indica il parametro n da introdurre
LOCATE 13, 66 : INPUT n  ' con il simbolo ? chiede il parametro sopra indicato
FOR x = 0 TO xm STEP ( xm / 2000 ) ' gestisce il campo ed il passo della variabile indipendente x
Y = SIN ( 5 * x ) * ( 1 / ( SQR ( 1 + ( x / xt ) ^ ( 2 * n ) ) ) ) ' calcola i punti della funzione prodotto
PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * Y ) , 14  ' presenta la curva della funzione con le ascisse normalizzate
NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x ... per il calcolo dei punti successivi
```

```
F5
                      xt
                      ? 8
                      x max
                      ? 20
                      n
                      ? 9
```

dopo l'introduzione del valore di n si ha la presentazione della curva mostrata in figura 52 .

La figura mostra che nell'intervallo compreso tra x = 0 e x = 8 la funzione y = Sen (5 x) oscilla normalmente; per valori di x > 8 si ha una brusca attenuazione dell'oscillazione che per x >> 8, dati i valori di scala, non è più percepibile.
Esempi analoghi per i polinomi di Butterworth trasformati sono lasciati alla libera scelta del lettore che potrà fare esperienza su questo particolare tema di studio.
La proprietà di mascheramento è utilizzabile, sia per sviluppi di natura analitica, come nell'esempio sopra riportato, assumendo qualsiasi valore di n, sia per la realizzazione di quadripoli fisici per attenuare fenomeni ondulatori non desiderati, in quest'ultimo caso più si eleva il valore di n più risulta complesso il quadripolo.
Nel caso in cui il polinomio di Butterworth definisca le caratteristiche fisiche di un quadripolo, l'azione di mascheramento si esplica in funzione della variabile indipendente x che viene espressa nel dominio della frequenza.
E' nel dominio della frequenza infatti che sono definiti i fenomeni ondulatori che devono essere elaborati.

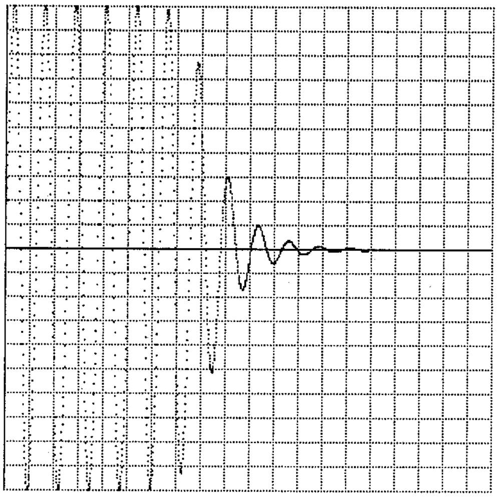

Figura 52
Mascheramento della funzione
Sen 5x con polinomio
di Butterworth
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 1/div.

10. 5 Il polinomio di Chebyschev

Il polinomio di Chebyschev ha caratteristiche simili al polinomio di Butterworth, permette però di ottenere, a parità di ordine n, pendenze superiori nel tratto decrescente della curva, pagando questo vantaggio con ondulazioni nell'intervallo in cui il secondo polinomio è a livello unitario costante. Il profilo del polinomio di Chebyscev forma una sorta di gradino a scendere in cui la pedata è ondulata, la parte ondulata inizia da x = 0 e resta alta per un certo tratto, per poi decrescere rapidamente, da un certo valore di x in poi, a livelli molto piccoli.
Il polinomio è espresso mediante la funzione parametrica normalizzata:

$$y = \frac{1}{\left[\ 1 + e^2\ C^2n(x)\ \right]^{1/2}}$$

in cui:

e = parametro pendenza e ondulazione

n = ordine del polinomio

Cn(x) è una funzione di n e di x
secondo la tabella:

n	Cn(x)
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
..	....

La funzione Cn(x) incide sulla pendenza del polinomio e sul numero di ondulazioni presenti nel tratto alto della curva.
Il valore del parametro (e) incide sulla pendenza del tratto discendente del polinomio e sull'ampiezza dell'ondulazione del tratto a livello alto della curva; è particolare il valore e = 1 che provoca ondulazioni che si sviluppano da y = 1 ad y = .707. Valori di e < 1 portano a ondulazioni inferiori a .707 e pendenze ridotte, valori di e > 1 portano ad ondulazioni superiori a .707 e pendenze elevate. Come si vede il polinomio di Chebyschev è definito da una espressione che risulta tanto più complicata quanto è più elevato il valore di n; questo fatto consiglia la compilazione del programma di calcolo e presentazione in modo che si possa scegliere una delle quattro funzioni Cn(x) sopra riportate. Per funzioni Cn(x) di ordine superiore al 4 è lasciata come esercizio al lettore la stesura ed implementazione in Qbasic.

In base alle corrispondenze simboliche in Qbasic si ha:

Per la funzione Cn(x) posta uguale a Yn

n = 1; C1(x) = y1 = x

n = 2; C2(x) = y2 = 2 * (x ^ 2) - 1

n = 3; C3(x) = y3 = 4 * (x ^ 3) - 3 * x

n = 4; C4(x) = y4 = 8 * (x ^ 4) - 8 * (x ^ 2) + 1

Per la selezione del Cn(x) voluto, per n da 1 a 4, si compila la somma S delle quattro funzioni moltiplicate ciascuna per un diverso coefficiente, da k1 a k4, il programma, in base al valore assegnato ad n, pone un solo valore di k = 1 abilitando la corrispondente funzione, le altre tre vengono moltiplicate per k = 0 e non incidono sulla somma S.
Si ha per S l'espressione:

S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4

Per il calcolo del polinomio si scrive:

y = 1 / SQR(1 + (e ^ 2) * (S ^ 2)) da esse discende il programma:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )        ' ASSE Y  2 quadranti
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSE X  2 quadranti
LOCATE 8, 66 : PRINT "e"  ' richiesta del parametro (e)
LOCATE 9, 66 : INPUT e   ' introduzione del parametro (e)
LOCATE 10, 66 : PRINT "n"   ' richiesta del valore di (n)
LOCATE 11, 66 : INPUT  n  ' introduzione del valore di n
LOCATE 12, 66 : PRINT "x  max"   ' richiesta del valore di x max
LOCATE 13, 66 : INPUT  xm  ' introduzione del valore di x max  ricerca del valore di n introdotto
IF   n = 1  THEN  k1 = 1  ELSE  k1 = 0   ' se n=1 pone k1=1 altrimenti pone k1=0
IF   n = 2  THEN  k2 = 1  ELSE  k2 = 0   ' se n=2 pone k2=1 altrimenti pone k2=0
IF   n = 3  THEN  k3 = 1  ELSE  k3 = 0   ' se n=3 pone k3=1 altrimenti pone k3=0
IF   n = 4  THEN  k4 = 1  ELSE  k4 = 0   ' se n=4 pone k4=1 altrimenti pone k4=0
FOR  x = 0  TO  xm  STEP  ( xm / 1000 )   ' gestisce il campo ed il passo della variabile indipendente  x
y1 = x                              ' calcolo delle quattro funzioni Cn(x)
y2 = ( 2 * ( x ^ 2 ) ) - 1          ' una sola delle quali
y3 = ( 4 * ( x ^ 3 ) - 3 * x )      ' sarà presentata
y4 = ( 8 * ( x ^ 4 ) - 8 * ( x ^ 2 ) + 1 )  ' sul video del P.C
S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4  ' seleziona la funzione  Cn(x) in base al valore di n
y = 1 / SQR( 1 + ( e ^ 2 ) * ( S ^ 2 ) )  ' calcola il valore del polinomio in base alla Cn(x) selezionata
PSET ( 460 * x / xm , 160  -  160 * y ), 14   ' presenta il grafico del polinomio
NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x= .... per il calcolo dei punti successivi
```

Per provare completamente il programma è necessario utilizzare tutte e quattro le funzioni Cn(x) per n = 1, n = 2, n = 3, n = 4 scegliendo di volta in volta un diverso valore del parametro (e) e dell'intervallo delle ascisse; iniziamo il lavoro per n = 1 e = 1   x max = 10:

```
F5
                                        e
                                        ? 1
                                        n
                                        ? 1
                                        x max
                                        ? 10
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione della prima curva caratteristica del polinomio di Chebyschev, il diagramma è riportato in figura 53.

Dalla figura si rileva che la curva non presenta alcuna ondulazione nella parte alta del tracciato e decresce molto dolcemente, ciò è dovuto al minimo valore dell'ordine del polinomio. Questo caso è utile soltanto come esempio didattico dato che la curva ottenuta non ha un effetto utile di mascheramento.

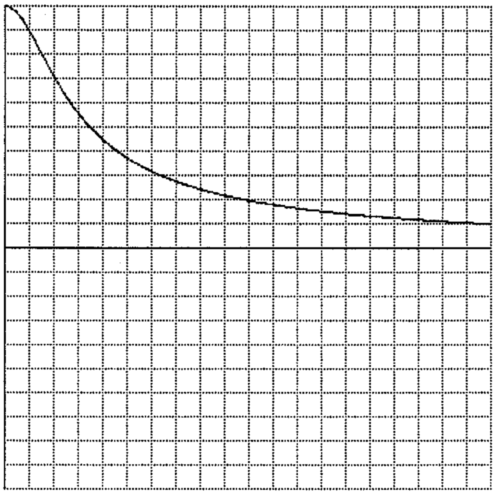

Figura 53
Andamento polinomio
di Chebyschev per e = 1, n = 1
Scala asse x = .5/div
Scala asse y = 1/div.

Risultati nettamente diversi e più importanti dei precedenti si ottengono con il polinomio di secondo ordine (n = 2) e con i valori: e = 1, x max = 10

F5

e
? 1
n
? 2
x max
? 10

Si ha la presentazione del polinomio come mostrato in figura 54, dalla curva si vede che è presente una ondulazione che si estende da y = .7 a y = 1 e che la pendenza è sensibile e tale da portare il tracciato al livello y = .13 per x = 2.
Questi risultati sono già utilizzabili a scopi di mascheramento.

Anche per il polinomio di Chebyschev, così come per il polinomio di Butterworth, la variabile indipendente deve essere espressa nel dominio della frequenza quando il polinomio, definendo le caratteristiche di un quadripolo, abbia funzione di mascheramento di fenomeni a carattere ondulatorio.

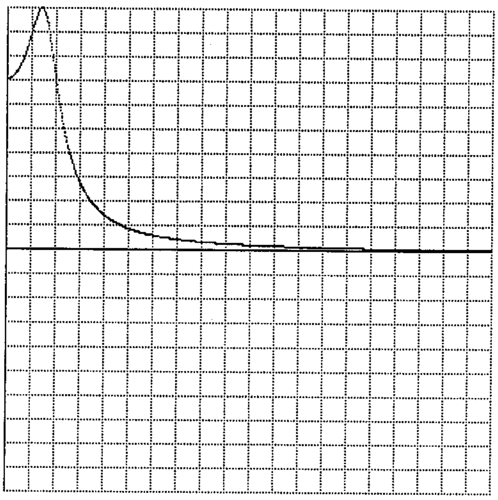

Figura 54
Andamento polinomio
di Chebyschev per e = 1, n =2
Scala asse x = .5/div.
Scala asse y = 1/div.

Un andamento del polinomio di Chebychev di notevole interesse applicativo si ha per n = 3 ed e = 5 con questi valori si ottengono ridotte ondulazioni nella parte alta del grafico e elevata pendenza, per evidenziare meglio il risultato conviene adottare un piccolo intervallo delle ascisse con x max = 5:

F5

e
? .5
n
? 3
x max
? 5

si ha la curva di figura 55 in cui l'ondulazione è contenuta tra y = .9 e y =1 e la pendenza del tratto discendente è tale che per x = 2 il valore di y si è attenuato a .08.
Un ultimo esempio si sviluppa per e = .2, n = 4, x max = 2

F5

e
? .2
n
? 4
x max
? 2

si ottiene l'ottimo andamento di mascheramento riportato in figura 56, il questo caso l'ondulazione è ridotta a livelli appena percettibili e la pendenza del tratto discendente porta y =.05 per x = 2.

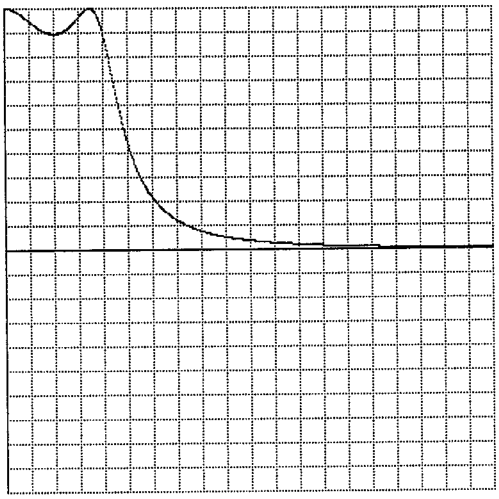

Figura 55
Andamento polinomio di Chebyschev per e =.5, n = 3
Scala asse x = .25/div.
Scala asse y = 1/div.

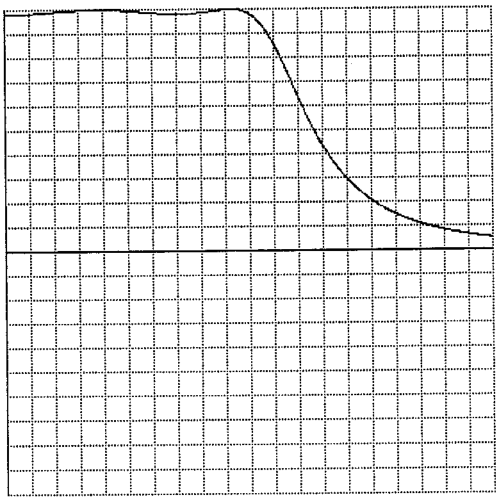

Figura 56
Andamento polinomio di Chebyschev per e =.2, n = 4
Scala asse x = .1/div.
Scala asse y = 1/div.

10. 6 La trasformazione semplice del polinomio di Chebychev

Il polinomio di Cebychev consente una trasformazione semplice che rovescia l'andamento della funzione rispetto all'originale.

La caratteristica della trasformazione del polinomio di Cebychev forma una sorta di gradino a salire da livelli molto piccoli di y, che iniziano per $x > 0$, per poi crescere rapidamente, da un certo valore di x in poi, giungendo in una zona a livello alto in cui sono presenti delle ondulazioni.
La trasformazione consiste nel cambiare la variabile x della funzione Cn(x) in xo/x, si ottiene così una nuova serie di funzioni:

n	Cn(x)
1	xo / x
2	$2 (xo / x)^2 - 1$
3	$4 (xo / x)^3 - 3 (xo / x)$
4	$8 (xo / x)^4 - 8 (xo / x)^2 + 1$
..	....

Dove il valore xo rappresenta l'ascissa a cui termina il tratto ascendente della curva per iniziare il tratto alto ondulato.
L'incidenza dei valori (e), (n), Cn(x), sull'andamento del polinomio trasformato è simile all'incidenza che questi hanno sul polinomio normale .
Nel compilare il nuovo programma di calcolo si deve evitare di inserire $x = 0$ nel campo di variabilità delle ascisse onde non creare condizioni di infinito.
Per la stesura del citato programma è necessario procedere alla composizione delle nuove Cn(x) secondo le note corrispondenze simboliche in Qbasic, seguendo i criteri di selezione delle funzioni Cn(x), al variare di n, già adottati nel paragrafo 10.5

n = 1; C1(x) = y1 = xo / x

n = 2; C2(x) = y2 = 2 * ((xo / x) ^ 2) - 1

n = 3; C3(x) = y3 = 4 * ((xo / x) ^ 3) - 3 * (xo / x)

n = 4; C4(x) = y4 = 8 * ((xo / x) ^ 4) - 8 * ((xo / x) ^ 2) + 1

Selezione di Cn(x)

-L'espressione di S è data da:

S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4

Calcolo del polinomio

-L'espressione di y è:

y = 1 / SQR(1 + (e ^ 2) * (S ^ 2))

implementandole si ottiene il programma per il computo e la presentazione del polinomio in trasformazione semplice di Chebychev:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )        ' ASSE Y  2 quadranti
LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 ) ' ASSE X  2 quadranti
LOCATE 8, 66 : PRINT "e"  ' richiesta del parametro (e)
LOCATE 9, 66 : INPUT e  ' introduzione del parametro (e)
LOCATE 10, 66 : PRINT "n"   ' richiesta del valore di (n)
LOCATE 11, 66 : INPUT n  ' introduzione del valore di n
LOCATE 12, 66 : PRINT "xo"   ' richiesta del valore di xo
LOCATE 13, 66 : INPUT xo  ' introduzione del valore di xo
LOCATE 14, 66 : PRINT "x max"  ' richiesta del valore di x max
LOCATE 15, 66 : INPUT xm  ' introduzione del valore di x max
' ricerca del valore di n introdotto
IF n = 1 THEN k1 = 1 ELSE k1 = 0  ' se n=1 pone k1=1 altrimenti pone k1=0
IF n = 2 THEN k2 = 1 ELSE k2 = 0  ' se n=2 pone k2=1 altrimenti pone k2=0
IF n = 3 THEN k3 = 1 ELSE k3 = 0  ' se n=3 pone k3=1 altrimenti pone k3=0
IF n = 4 THEN k4 = 1 ELSE k4 = 0  ' se n=4 pone k4=1 altrimenti pone k4=0
FOR x = .000001 TO xm STEP ( xm / 1000 )  ' gestisce il campo ed il passo della variabile
                                           ' indipendente di x con esclusione del valore x=0
y1 = xo / x            ' calcolo delle quattro funzioni Cn(x) trasformate
y2 = ( 2 * ( ( xo / x ) ^ 2 ) ) - 1                 ' una sola delle quali
y3 = ( 4 * ( ( xo / x ) ^ 3 ) - 3 * ( xo / x ) )    ' sarà presentata
y4 = ( 8 * ( ( xo / x ) ^ 4 ) - 8 * ( ( xo / x ) ^ 2 ) + 1 )  ' sul video del P.C
S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4  ' seleziona la funzione Cn(x) in base al valore di n

y = 1 / SQR( 1 + ( e ^ 2 ) * ( S ^ 2 ) )  ' calcola il valore del polinomio in base alla Cn(x) selezionata
PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * y), 14  ' presenta il grafico del polinomio  trasformato
NEXT x  ' rimanda all'istruzione FOR x= .... per il calcolo dei punti successivi
```

proviamo il nuovo programma per e = .5; n = 4; xo =10; x max = 20
premiamo F5

```
e
? .5
n
? 4
xo
? 10
x max
? 20
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione della curva caratteristica del polinomio di Chebychev trasformato, il diagramma è riportato in figura 57.
Dalla figura si rileva che la curva resta a livelli molto bassi per un certo tratto, per poi salire rapidamente fino a livello di $y = .9$ quando $x = xo = 10$, raggiunge successivamente il livello alto nel quale ondula modestamente. L'effetto di mascheramento in questo caso si realizza per valori inferiori a xo, cioè nell'intervallo tra $x > 0$ e $x < xo$, il polinomio trasformato ha di fatto un andamento rovesciato rispetto al polinomio originale.

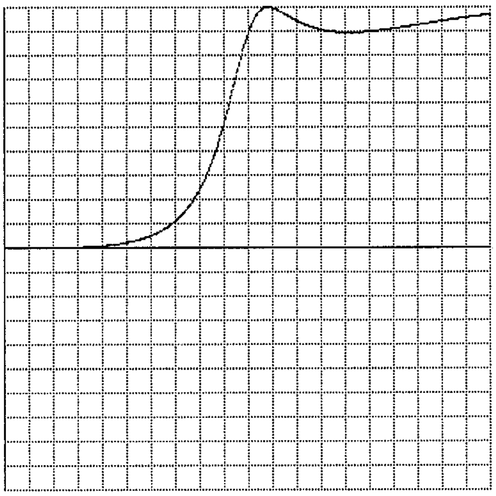

Figura 57
Andamento polinomio di Chebyschev trasformato simmetrico per e = .5, n = 4
Scala asse x = 1/div.
Scala asse y = 1/div.

10.7 La doppia trasformazione del polinomio di Chebychev

Anche il polinomio di Chebychev, così come quello di Butterworth, dà modo di ottenere una funzione a doppio scalino.
Questa caratteristica si ottiene dalla trasformazione delle funzioni Cn(x) in cui alla variabile x viene sostituita la variabile (x - xc) come sotto indicato:

n	Cn(x)
1	$x - xc$
2	$2 (x - xc)^2 - 1$
3	$4 (x - xc)^3 - 3 (x - xc)$
4	$8 (x - xc)^4 - 8 (x - xc)^2 + 1$

Dove il valore xc rappresenta l'ascissa corrispondente al punto centrale dello scalino, si può infatti posizionare lo scalino, ovvero le due zone di mascheramento laterali, dimensionando xc opportunamente.
L'incidenza dei valori (e), (n), Cn(x), sull'andamento del polinomio in doppia trasformazione è simile all'incidenza che questi hanno sul polinomio normale. Per la stesura del programma di calcolo e presentazione del grafico è necessario procedere alla composizione delle nuove Cn(x) secondo le corrispondenze simboliche in Qbasic, seguendo i criteri di selezione delle funzioni Cn(x), al variare di n, già adottati nel paragrafo 10.5:

Per le nuove Cn(x)

n = 1; C1(x) = y1 = x - xc

n = 2; C2(x) = y2 = 2 * ((x - xc) ^ 2) - 1

n = 3; C3(x) = y3 = 4 * ((x - xc) ^ 3) - 3 * (x - xc)

n = 4; C4(x) = y4 = 8 * ((x - xc) ^ 4) - 8 * ((x - xc) ^ 2) + 1

Per la selezione di Cn(x)

S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4

Per il calcolo del polinomio

y = 1 / SQR(1 + (e ^ 2) * (S ^ 2))

implementando le espressioni sopra riportate si ottiene il programma per il computo e la presentazione del polinomio in doppia trasformazione di Cebychev:

```
LINE ( 0, 0 )-( 0, 320 )          ' ASSE Y 2 quadranti

LINE ( 0, 160 )-( 460, 160 )  ' ASSE X 2 quadranti

LOCATE 8, 66 : PRINT "e"   ' richiesta del parametro (e)

LOCATE 9, 66 : INPUT e    ' introduzione del parametro (e)

LOCATE 10, 66 : PRINT "n"    ' richiesta del valore di (n)

LOCATE 11, 66 : INPUT n    ' introduzione del valore di n

LOCATE 12, 66 : PRINT "xc"   ' richiesta del valore di xc

LOCATE 13, 66 : INPUT xc' introduzione del valore di xc

LOCATE 14, 66 : PRINT "x max"    ' richiesta del valore di x max

LOCATE 15, 66 : INPUT xm  ' introduzione del valore di x max
                           ' ricerca del valore di n introdotto

IF n = 1 THEN k1 = 1 ELSE k1 = 0  ' se n=1 pone k1=1 altrimenti pone k1=0

IF n = 2 THEN k2 = 1 ELSE k2 = 0 ' se n=2 pone k2=1 altrimenti pone k2=0          &
```

```
IF n = 3  THEN  k3 = 1  ELSE  k3 = 0  'se n=3 pone k3=1 altrimenti pone k3=0

IF n = 4  THEN  k4 = 1  ELSE  k4 = 0  ' se n=4 pone k4=1 altrimenti pone k4=0

FOR x = .000001 TO xm STEP (xm / 1000)    ' gestisce il campo ed il passo della variabile indipendente di x

y1 =  x - xc                             ' calcolo delle quattro funzioni  Cn(x)  doppio trasformate

y2 = (2 * ( ( x - xc ) ^ 2) ) - 1         ' una sola delle quali

y3 = (4 * ( ( x - xc ) ^ 3) - 3 * ( x - xc ) )      ' sarà presentata

y4 = (8 * ( ( x - xc ) ^ 4) - 8 * ( ( x - xc ) ^ 2) + 1)  ' sul video del P.C

S = k1 * y1 + k2 * y2 + k3 * y3 + k4 * y4  ' seleziona la funzione  Cn(x) in base al valore di n

y = 1 / SQR( 1 + ( e ^ 2 ) * ( S ^ 2 ) )  ' calcola  polinomio in doppia trasformazione in base alla Cn(x) scelta

PSET ( 460 * x / xm , 160 - 160 * y ), 14 ' presenta il grafico del polinomio   trasformato

NEXT x   ' rimanda all'istruzione FOR x= .... per il calcolo dei punti successivi
```

Tracciamo il grafico del polinomio doppio trasformato per e =.5; n = 4; xc =10; x max = 20

```
F5              e
                ? .5
                n
                ? 4
                xc
                ? 10
                x max
                ? 20
```

dopo l'introduzione dell'ultimo dato si ha la presentazione della curva caratteristica del polinomio di Chebychev doppio trasformato, il diagramma è riportato in figura 58.

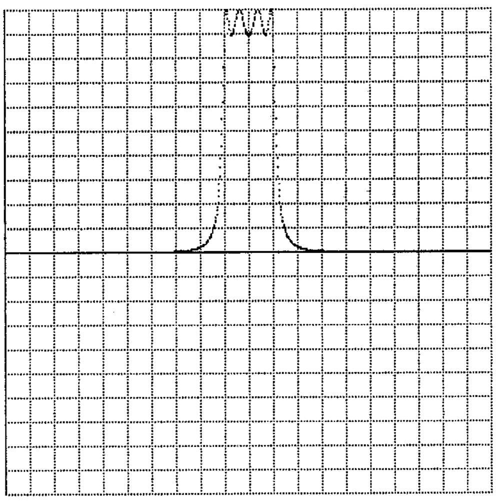

Figura 58
Andamento del polinomio di Chebychev doppio trasformato per e = .5, n = 4
Scala asse x = 1/div
Scala asse y = 1/div.

Dalla figura si osserva lo scalino piazzato al centro del reticolo, con il massimo dell'ondulazione del tratto a livello alto in corrispondenza di $x = xc = 10$. L'ondulazione è contenuta tra $y = .9$ e $y = 1$. I due tratti ad elevata pendenza, il primo a salire, il secondo a scendere, sono tali che per $xc-2$ e $xc+2$ il livello di y è già a valori molto piccoli. Questa curva mostra una ottima caratteristica di mascheramento per i due intervalli di x compresi, il primo, tra $x = 0$ e $x < xc-1$, il secondo per $x > xc+1$.