3) L 'algoritmo di calcolo della funzione di correlazione tra segnali definiti in bande di frequenze <u>non</u> rettangolari.

L' algoritmo di calcolo della funzione in oggetto si ottiene partendo dalla funzione di correlazione normalizzata ottenuta al paragrafo 1) :

$$C(\tau) = \mathrm{Cos}\,(\omega\tau) \qquad \textbf{3.1)}$$

e dalla funzione di densità spettrale $w(\omega)$ che caratterizza i segnali da correlare.

Per il calcolo della nuova funzione di correlazione dovremo risolvere il seguente integrale che andremo a commentare:

$$C(\tau) = \int_0^\infty \mathbf{W(\omega)\ Cos\ (\omega\,\tau)\ d\ \omega} \qquad \textbf{3.2)}$$

La funzione da integrare è il prodotto tra la funzione di correlazione di un generico segnale sinusoidale e la funzione di densità spettrale che caratterizza i segnali da correlare.

I limiti di integrazione sono compresi tra frequenza zero ed infinito dato che il profilo della $W(\omega)$, non essendo rettangolare, si estende in essi.

Per sviluppare l'integrale è necessario conoscere la funzione che caratterizza $W(\omega)$; assumiamo pertanto, nel nostro caso, che tale funzione sia dovuta ad un circuito risonante serie; per tale filtro la $W(\omega)$ è definita come segue:

$$W(\omega) = \frac{4\ (\omega_f)^2\ \ \omega^2}{[\ \omega^2 - (\omega_o)^2]^2\ +4\ (\omega_f)^2\ \omega^2} \qquad \textbf{3.3)}$$

dove $\omega = 2\,\pi\,f$; $(\omega_o)^2 = 1/(LC)$; $(\omega_f) = R/2L$

è immediato constatare che la funzione data è pari essendo $W(\omega) = W(-\,\omega)$.

Anche la funzione di correlazione 3.1) è pari essendo $\mathrm{Cos}\,(\omega\tau) = \mathrm{Cos}\,(-\,\omega\tau)$.

Dato che la 3.1) e la 3.3) sono entrambe pari è possibile riscrivere la 3.2) con i limiti di integrazione che si estendono tra $-\infty$ e $+\infty$ invece che tra 0 e $+\infty$, avendo cura a dividere per due il nuovo integrale:

$$C(\tau) = (1/2)\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\, \mathrm{Cos}\,(\omega\,\tau)\; d\omega \qquad 3.4)$$

In virtù della formula d Eulero, che dimostra essere:

$$e^{jx} = \mathrm{Cos}\, x + j\, \mathrm{Sen}\, x$$

osservando inoltre che la funzione Sen x è dispari, quindi nullo il suo integrale tra limiti simmetrici rispetto allo zero, possiamo scrivere la 3.4) come segue:

$$C(\tau) = (1/2)\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\; e^{j\omega\tau}\; d\omega \qquad 3.5)$$

La soluzione di questo integrale può essere affrontata secondo la teoria dei residui essendo $W(\omega)$ una funzione analitica; si può scrivere infatti:

$$C(\tau) = (1/2)\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\; e^{j\omega\tau}\, d\omega =$$

$$= 2\,\pi\, j\; \sum \text{Residui}\, [(1/2)\, W(\omega)\; e^{j\omega\tau}\, |_{\omega = \omega' + j\omega_f}\;\; |_{\omega = -\omega' + j\omega_f} \qquad 3.6)$$

con i poli $+\omega'+j\omega_f$ e $-\omega'+j\omega_f$, della $W(\omega)$, calcolati, dopo aver posto $\omega' = \sqrt{[\, (\omega_o)^2 - (\omega_f)^2\,]}$, mediante la scomposizione in fattori del denominatore della 3.3 e successiva trasformazione della $W(\omega)$ stessa in somma di frazioni.

La 3.6) si può scrivere pertanto come segue:

$$\mathbf{C(\tau)} = 2\pi\mathbf{j}\ (\omega'+\mathbf{j}\omega_f)\ \Big[\mathbf{(1/2)\ W(}\ \omega'+\mathbf{j}\omega_f\ \mathbf{)}\ e^{\mathbf{j}(\omega' + \mathbf{j}\omega_f)\tau} \Big] +$$

$$+\ 2\pi\mathbf{j}\ (-\omega'+\mathbf{j}\omega_f)\ \Big[\mathbf{(1/2)\ W(}\ -\omega'+\mathbf{j}\omega_f\ \mathbf{)}\ e^{\mathbf{j}(-\omega' + \mathbf{j}\omega_f)\tau} \Big]$$

che infine , mediante sviluppi algebrici e normalizzazione, diventa:

$$\mathbf{C(\tau)} = e^{-\omega_f |\tau|}\ [\ \mathrm{Cos}\ \omega'\tau\ - (\omega_f / \omega')\ \ \mathrm{Sen}\ (\omega'\ |\tau|)] \qquad 3.7)$$

Nel caso in cui il Q del circuito risonante sia elevato la 3.7) si può scrivere:

$$\mathbf{C(\tau)} = e^{-\omega_f |\tau|}\ \mathrm{Cos}\ \omega_o\tau \qquad 3.8)$$

L'andamento della funzione di correlazione della 3.8) è sotto riportato per:
L= 0.01 H ; C = 0.1 μF ; R = 6 Ω ; f_o = 5035 Hz ; Q = 52
ω_o = 31622 ; ω_f = 300 $\tau_{\text{fondo scala}}$ = 4 mSec.