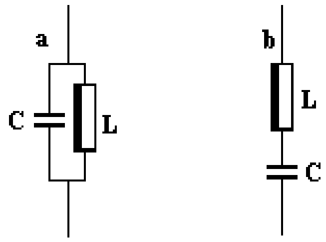
## 1.6 I circuiti risonanti

I circuiti risonanti, detti anche circuiti accordati o selettivi, sono strutture fondamentali per la progettazione dell'elettronica analogica; con essi si realizzano oscillatori, filtri di banda, circuiti di reiezione, sistemi di accordo per trasduttori, ecc. La configurazione di un circuito risonante si avvale dei componenti elementari quali l'induttanza ed il condensatore collegati tra loro, o in serie o in parallelo, così come è mostrato in figura 1.11.

figura 1.11




**a = configurazione parallelo**

**b = configurazione serie**

Nella figura sono rappresentate le due configurazioni circuitali nell'ipotesi che entrambi i componenti che le costituiscono siano privi di perdite.
La caratteristica dei circuiti risonanti è data dalla " frequenza di risonanza", frequenza per la quale il circuito risonante parallelo presenta impedenza elevata mentre il circuito risonante serie presenta impedenza bassa.
Alla frequenza di risonanza, e in assenza di perdite, i valori numerici di Xc e di XL coincidono, sia per il circuito parallelo che per il circuito serie, da ciò si ricava la formula generale che consente il calcolo di tale frequenza:

$$\mathbf{Fr = 1 / [ ( 2 * \pi ) * \sqrt{( L * C )} ]}$$

dove
la frequenza è espressa in Hertz
la capacità C è espressa in Farad
l'induttanza L in Henry

Un rapido calcolo consentirà di comprendere come impiegare la formula:
Supponiamo di dover calcolare la frequenza di risonanza di un circuito formato dal parallelo di un condensatore da 0.1 μF ed un'induttanza da 30 mH ; applicando la formula si ha:

$$Fr = 1 / [ (2 * 3.14) * \sqrt{( 0.03H * 0.1 * 10^{-6} F )} ] = 2907.23 \text{ Hz}$$

Sviluppando la formula in L od i C si ottengono due espressioni utili per calcolare, una volta stabilita la frequenza Fr voluta, quale valori di C o di L utilizzare per realizzare il circuito risonante interessato; le due formule sono le seguenti:

$$\mathbf{L = 1 / [ ( 2 * \pi * Fr )^2 * C]}$$

$$\mathbf{C = 1 / [ ( 2 * \pi * Fr )^2 * L]}$$

Le formule ora indicate sono utili per il calcolo di un componente nel caso in cui, impostata la frequenza di risonanza desiderata, si abbia a disposizione l'altro componente; vediamo due esempi:

Si voglia realizzare un circuito risonante alla frequenza di 12000 Hz avendo a disposizione un condensatore da 10000 pF; si applica la prima formula e si ottiene:

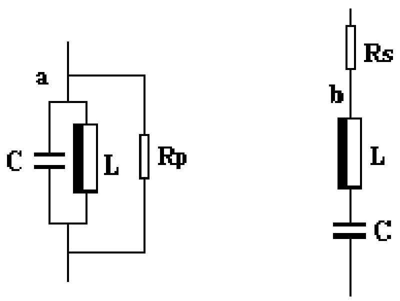
$$L = 1 / [ (2 * 3.14 * 12000 )^2 * 0.01 * 10^{-6} \text{ F}] = 17.6 \text{ mH}$$

Si voglia realizzare un circuito risonante alla frequenza di 32000 Hz avendo a disposizione un'induttanza da 3 mH; si applica la seconda formula e si ottiene:

$$C = 1 / [ (2 * 3.14 * 32000 )^2 * 0.003 \text{ H} ] = 8253 \text{ pF}$$

È indispensabile a questo punto ricordare che abbiamo iniziato l'esame dei circuiti risonanti partendo da configurazioni circuitali prive di perdite allo scopo di non mettere troppe variabili in gioco; è giunto ora il momento di rivedere i circuiti di figura 1.11 e di completarli con i simboli circuitali relativi alle perdite dei componenti (figura 1.12) .

figura 1.12




**a = configurazione parallelo**

**b = configurazione serie**

Nella figura con i simboli Rp ed Rs sono indicate le perdite complessive del condensatore e dell'induttanza, queste resistenze ideali caratterizzano il coefficiente di merito del circuito risonante che, similmente a quello dei singoli componenti, è indicato con il simbolo Q. L'introduzione di questa nuova variabile è alla base di tutte le computazioni relative all'impiego pratico dei circuiti risonanti; è necessario pertanto esplicitarla con l'ausilio di una formula di calcolo.
Il coefficiente di merito per un circuito risonante parallelo si esprime come:

$$\mathbf{Q = Rp / X_L}$$

oppure come:

$$\mathbf{Q = Rp / Xc}$$

Il coefficiente di merito per un circuito risonante serie si esprime come segue:

$$\mathbf{Q = X_L / R_s}$$

oppure:

$$\mathbf{Q = X_c / R_s}$$

Vediamo ora di applicare le formule per il calcolo del Q dei due circuiti risonanti di cui si sono calcolati i componenti all'inizio.

Per il primo caso, in cui abbiamo calcolato l'induttanza, i valori che definiscono il circuito risonante sono:

L = 17.6 mH
F = 12000 Hz
C = 10000 pF

supponiamo che tale circuito sia di tipo parallelo con una resistenza di perdita complessiva pari a

$$R_p = 300000 \text{ ohm}$$

calcolando la reattanza $X_L$ risulta

$$X_L = 6.28 * 12000 \text{ Hz} * 17.6 \text{ mH} = 1326.3 \text{ ohm}$$

ed infine il valore del coefficiente di merito

$$Q = 300000 \text{ ohm} / 1326.3 \text{ ohm} \approx 226$$

Il valore del Q che abbiamo ottenuto è da ritenersi buono per la maggior parte delle applicazioni pratiche; valori superiori sono realizzabili.

Per il secondo caso, in cui abbiamo calcolato la capacità, i valori che definiscono il circuito risonante sono:

L = 3 mH
F = 32000 Hz
C = 8253 pF

Supponiamo che tale circuito sia di tipo serie con una resistenza di perdita complessiva pari a

$$R_s = 55 \text{ ohm}$$

calcolando la reattanza $X_L$ risulta

$$X_L = 6.28 * 32000 \text{ Hz} * 3 \text{ mH} = 602.8 \text{ ohm}$$

ed infine il valore del coefficiente di merito

$$Q = 602.8 \text{ ohm} / 55 \text{ ohm} \approx 11$$

Il valore del Q che abbiamo ottenuto è da ritenersi poco buono per la maggior parte delle applicazioni pratiche; valori superiori sono realizzabili.

Gli esercizi che abbiamo ora sviluppato erano strutturati ad arte per mostrare come applicare le formule di calcolo ed ottenere, in un caso un Q elevato, e nell'altro un Q basso; nell' impiego pratico il valore del Q dipenderà, o dalle condizioni fisiche dei componenti, o dalle prime e dalle condizioni imposte dal progettista per ottenere risultati particolari. Nei paragrafi successivi esamineremo questa importante problematica.

**1.6.1 Le caratteristiche di selettività dei circuiti risonanti serie**
Una delle particolarità più significative dei circuiti risonanti è costituita dal loro comportamento al variare della frequenza. Facendo ad esempio riferimento al circuito serie questo mostrerà una resistenza molto bassa alla frequenza Fr, e una reattanza induttiva che andrà ad aumentare per valori della frequenza superiori ad Fr o capacitiva che andrà ad aumentare per valori della frequenza inferiori ad Fr.
L'andamento della legge di variazione citata è rappresentato dalla funzione matematica sotto riportata che esprime l'impedenza Z in funzione della frequenza:

$$\mathbf{Z = \sqrt{\{ ( Rs )^2 + [( \omega * L) - ( 1 / \omega * C ) ]^2 \}}}$$

dove

L = valore dell'induttanza in Henry

C = valore della capacità in Farad

Rs = valore della resistenza in ohm (resistenza che racchiude le perdite totali su L e su C)

$\omega = 2 * \pi * f$ detta pulsazione angolare in cui f è espresso in Hertz

Per evidenziare l'azione del circuito risonante nell'ambito di un circuito utilizzatore si deve prendere in considerazione la corrente Is che scorre in esso al variare della frequenza mediante l'espressione

$$\mathbf{Is = V / Z}$$

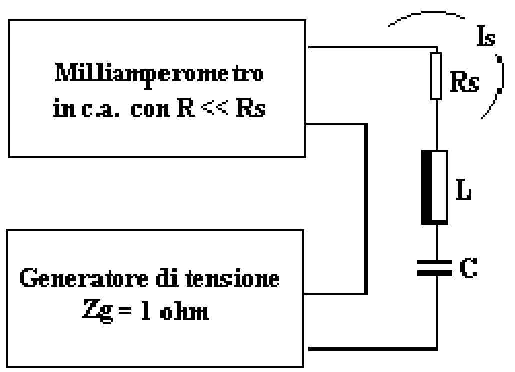
cioè:

$$\mathbf{Is = V / \sqrt{\{ ( Rs )^2 + [( \omega * L) - ( 1 / \omega * C ) ]^2 \}}}$$

dove V è la tensione di un generatore a bassissima impedenza ( generatore di tensione)

La curva dell'andamento della Is in funzione della frequenza è controllabile sperimentalmente disponendo un circuito di misura come riportato in figura 1.13.

figura 1.13



Lo schema di misura è impostato per controllare come varia Is, quindi Z, in dipendenza della frequenza. Il generatore, a frequenza variabile, ha il compito di fornire la tensione alternata,Vg = 0.5 Veff, su bassa impedenza ( Zg = 1 ohm) per eseguire la misura, il milliamperometro ha il compito di misurare la corrente circolante nel circuito oscillante. Un esempio numerico aiuterà a comprendere meglio la procedura di misura; ipotizziamo che il circuito risonante abbia le seguenti caratteristiche:

frequenza di risonanza Fr  = 5000 Hz

induttanza L = 159 mH

capacità   C = 6360 pF

reattanza induttiva    $X_L$ = 5000 ohm

reattanza capacitiva  $X_c$ = 5000 ohm

resistenza di perdita Rs = 50 ohm

coefficiente di merito Q = 100

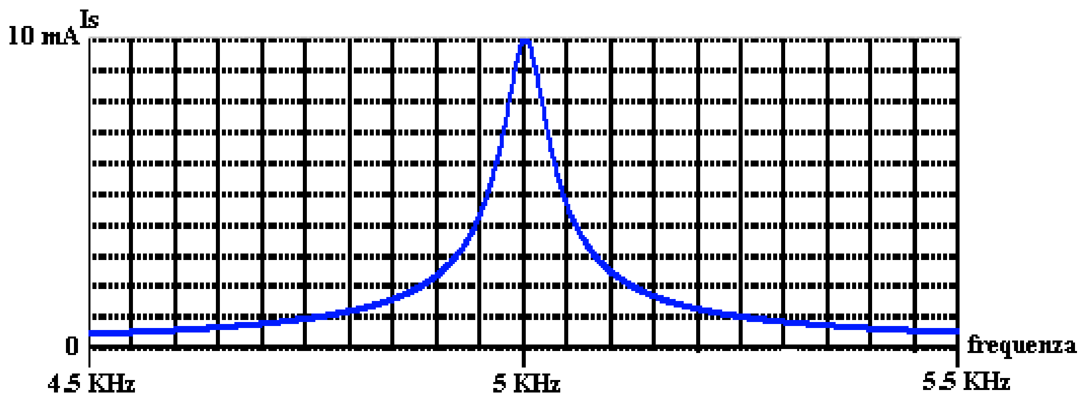
Per Vg = 0.5 Veff, la corrente Is sarà espressa dalla relazione

$$Is = 0.5 \text{ Veff.} / \sqrt{\{( 50 \text{ ohm} )^2 + [( 6.28 * f * 0.159 \text{ H}) - ( 1 / 6.28 *f * 6360 * 10^{-12} \text{ F} ) ]^2 \}}$$

relazione verificabile mediante il circuito di misura di figura 1.13 al variare della frequenza in un intervallo di valori compreso tra  4500 e 5500 Hz.

La curva teorica dell'andamento di Is è riportata come riscontro alla correttezza delle misure nella curva di figura 1.14

Figura 1.14




La figura mostra come per f = Fr = 5000 Hz la corrente Is raggiunga il massimo valore pari a

$$Is = Vg / Rs = 0.5\text{Veff.} / 50 \text{ ohm} = 10 \text{ mA}$$

e che per valori di f superiori od inferiori a 5000 Hz la corrente Is decresca rapidamente; quest'andamento, detto selettività del circuito risonante, è tanto più marcato quanto è elevato il Q del circuito ossia quanto più piccole sono le perdite espresse da Rs.
Si deve osservare che alla risonanza la corrente Is è:

$$Is = Vg / Rs$$

essendo $Q = Xc / Rs$

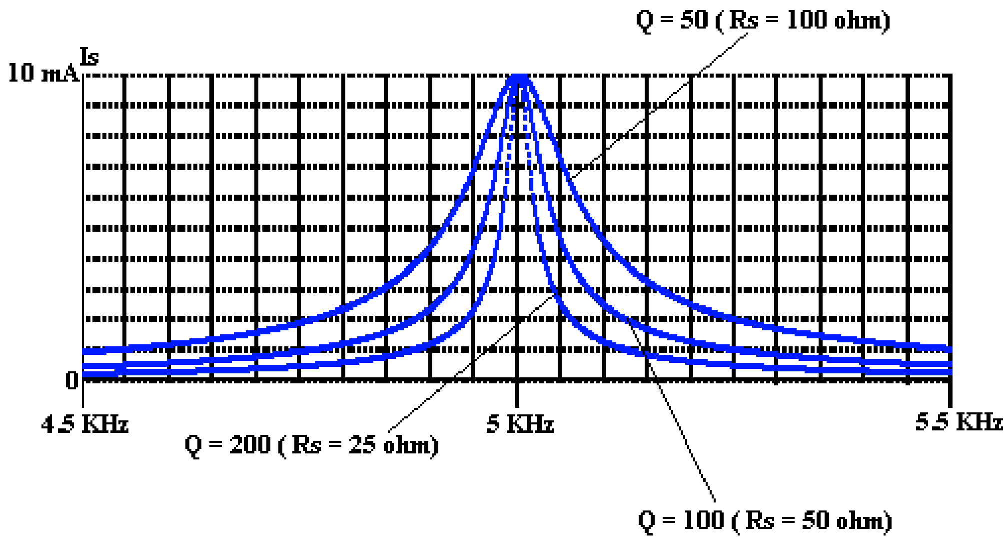
si può scrivere

$$\mathbf{Is = Vg * Q / Xc}$$

e concludere che la corrente Is, che scorre nel circuito serie alla frequenza di risonanza, è proporzionale al valore di Q.

È interessante un confronto tra la figura 1.14, tracciata per Rs = 50 ohm ( Q = 100 ) e Vg = 0.5 Veff., con la figura 1.15 nella quale, assieme alla curva di selettività per Q = 100, sono riportate anche due ipotetiche curve, una per Q = 200 ( Rs = 25 ohm) e Vg = 0.25 Veff. e l'altra per Q = 50 ( Rs = 100 ohm) e Vg = 1 V eff.; si ha modo di osservare come la curva per Q = 200 è molto più ripida della prima, mentre la curva per Q = 50 è meno ripida della prima.

figura 1.15

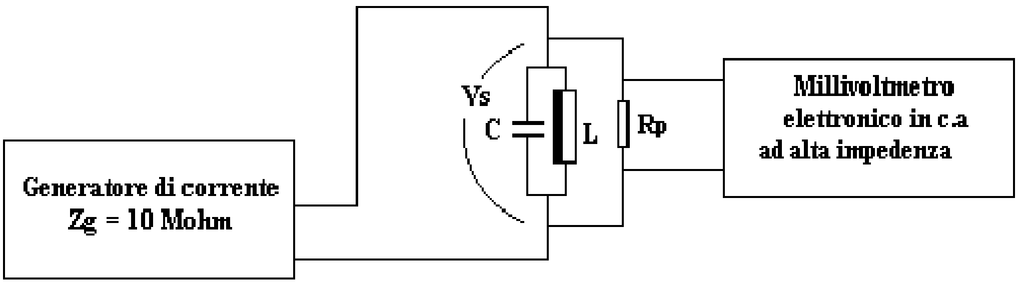


### 1.6.2 Le caratteristiche di selettività dei circuiti risonanti parallelo

Il comportamento di un circuito risonante parallelo al variare della frequenza è simile al comportamento del circuito risonante serie.
Le formule che definiscono l'impedenza del circuito parallelo sono molto complicate e di difficile impiego, le curve di selettività però, se il coefficiente di merito del circuito parallelo è Q > 10, sono praticamente coincidenti con quelle del circuito serie.
Così come per il circuito serie è definita con Is la corrente che scorre attraverso di esso, così per il circuito parallelo è definita con Vs la tensione che si forma ai capi di quest'ultimo.
La differenza sostanziale tra i due circuiti è: che in quello serie è la corrente Is alla risonanza che varia in funzione della frequenza ed è proporzionale a Q, mentre in quello parallelo è la tensione Vs alla risonanza che varia in funzione della frequenza ed è anch'essa proporzionale a Q.

La curva dell'andamento della Vs in funzione della frequenza è controllabile sperimentalmente predisponendo un circuito di misura come riportato in figura 1.16.

figura 1.16




Lo schema di misura è impostato per controllare come varia Vs in dipendenza della frequenza. Il generatore, a frequenza variabile, ha il compito di fornire la corrente alternata, Ig = 0.02 mA , su alta impedenza ( Zg = 10 Mohm) per eseguire la misura, il millivoltmetro ha il compito di misurare la tensione ai capi nel circuito oscillante. Un esempio numerico aiuterà a comprendere meglio la procedura di misura; ipotizziamo che il circuito risonante abbia le seguenti caratteristiche:

frequenza di risonanza Fr = 5000 Hz

induttanza L = 159 mH

capacità C = 6360 pF

reattanza induttiva XL = 5000 ohm

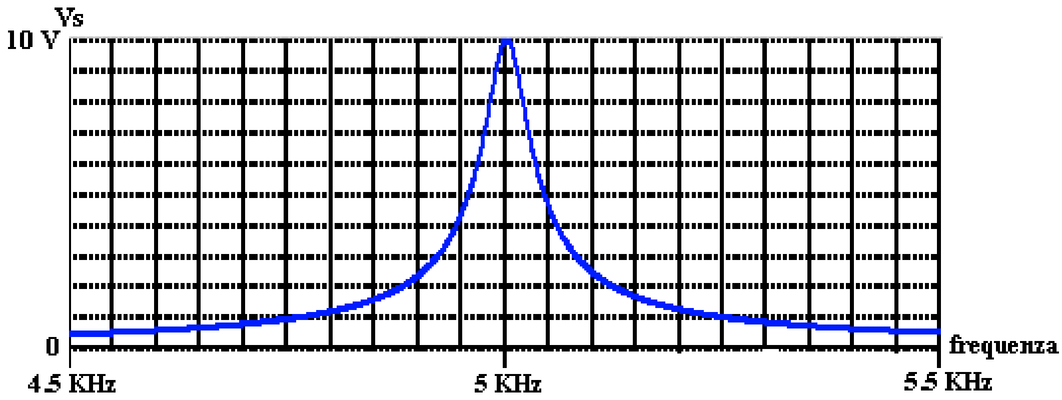
reattanza capacitiva Xc = 5000 ohm

resistenza di perdita Rp = 500000 ohm

coefficiente di merito Q = 100

La curva teorica dell'andamento di Vs è riportata come riscontro alla correttezza delle misure nella curva di figura 1.17 per un intervallo di valori di frequenza compreso tra 4500 e 5500 Hz.

figura 1.17




La figura mostra come per f = Fr = 5000 Hz la tensione Vs raggiunga il massimo valore pari a

$$Vs = Ig * Rp = 0.02 \text{ mA} * 500000 \text{ ohm} = 10 \text{ V}$$

e che per valori di f superiori od inferiori a 5000 Hz la tensione Vs decresca rapidamente; quest'andamento, detto selettività del circuito risonante, è tanto più marcato quanto è elevato il Q del circuito ossia quanto più piccole sono le perdite espresse da Rp ( per valori di Rp grandi si hanno piccole perdite per valori di Rp piccoli si hanno grandi perdite).

Si deve osservare che alla risonanza la tensione Vs è:

$$Vs = Ig * Rp$$

essendo Q = Rp / Xc

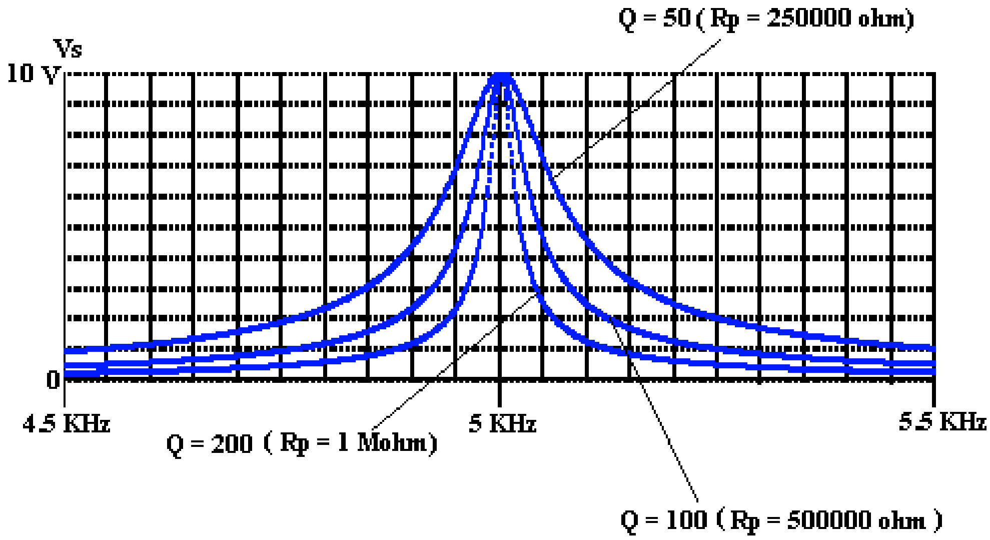
si può scrivere

$$\mathbf{Vs = Ig * Q * Xc}$$

e concludere che la tensione Vs, che si forma ai capi nel circuito parallelo alla frequenza di risonanza, è proporzionale al valore del Q.

Analogamente a quanto fatto per il circuito risonante serie, è interessante un confronto tra la figura 1.17, tracciata per Rp = 500000 ohm ( Q = 100 ) e Ig = 0.02 mAeff., con la figura 1.18 nella quale, assieme alla curva di selettività per Q = 100, sono riportate anche due ipotetiche curve, una per Q = 200 ( Rp = 1 Mohm ) e Ig = 0.01 mAeff. e l'altra per Q = 50 ( Rp = 250000 ohm) e Ig = 0.04 mAeff.; si ha modo di osservare come la curva per Q = 200 è molto più ripida della prima, mentre la curva per Q = 50 è meno ripida della prima.

figura 1.18




Nei circuiti risonanti, sia serie che parallelo, è di notevole interesse la valutazione del rapporto

$$\Delta f = Fr / ( 2 * Q )$$

Questo rapporto, espresso in Hz, definisce l'entità dello spostamento di frequenza, in più o in meno, rispetto alla frequenza di risonanza Fr, per il quale il valore di corrente o di tensione massimo si riduce di circa 0.7 volte; il doppio dello spostamento, pari a " **2 Δf ",** è detta la larghezza di banda del circuito risonante; questa definizione è valida per valori di Q maggiori od uguali a 10.
Un esempio di tale valutazione è fattibile osservando la figura 4.18; se esaminiamo la curva di risonanza tracciata per Q = 50 possiamo scrivere:

$$\Delta f = Fr / ( 2 * Q ) = 5000 \text{ Hz} / ( 2 * 50 ) = 50 \text{ Hz}$$

Se controlliamo ora a quale livello di tensione scende la curva presa in esame, sia a sinistra che a destra, per uno scostamento dalla risonanza di 50 Hz, osserviamo che il livello cade da 10 V a 7 V riducendosi di 0.7 volte; ne segue che la larghezza di banda del circuito risonante preso in esame è di:

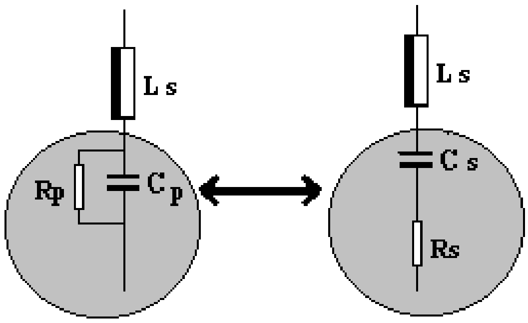
$$2 \Delta f = 2 * 50 \text{ Hz} = 100 \text{ Hz}$$

### 1.6.3 Le formule di trasformazione parallelo - serie

Le formule di trasformazione consentono il passaggio da circuiti parallelo a circuiti serie e viceversa.
Il passaggio avviene mediante la trasformazione dei parametri dei circuiti; queste trasformazioni sono d'importanza fondamentale per il dimensionamento di circuiti d'accordo per carichi reattivi con perdite.

Per la comprensione delle formule di trasformazione è d'aiuto la figura 1.19:

figura 1.19




In figura sono mostrati i due circuiti risonanti nelle configurazioni serie. Il circuito di destra presenta la configurazione, già studiata in precedenza, nella quale tutte le perdite sono rappresentate dalla resistenza Rs, il circuito di sinistra mostra invece il caso in cui dette perdite siano rappresentate dalla resistenza parallelo Rp; una doppia freccia è tracciata tra i due circuiti all'interno dei cerchi ombrati, oggetto della trasformazione, a significare che è possibile, semplicemente, passare da una configurazione all'altra trasformando i parametri della prima nei parametri della seconda.

I parametri, oggetto della trasformazione, sono di seguito elencati:

$$Xcs \Leftrightarrow Xcp$$

$$Rs \Leftrightarrow Rp$$

Per valori del coefficiente di merito Q maggiore di 10 il legame tra i parametri diventa:

$$\mathbf{Xcs = Xcp}$$

$$\mathbf{Rs = Rp / Q^2}$$

Per valori del coefficiente di merito Q inferiori a 10, sussistono in vece le seguenti relazioni:

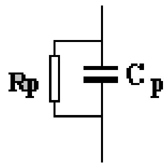
$$\mathbf{Rs = Rp / (Q^2 + 1)}$$

$$\mathbf{Xcs = Xcp / [( 1/Q^2 ) + 1]}$$

L'utilità e la semplicità d'impiego di queste formule è mostrata nell'esempio numerico che segue:

Si debba  collegare ad un amplificatore di potenza  un trasduttore elettroacustico piezoelettrico avente la struttura circuitale indicata in figura 1.20 e le seguenti caratteristiche elettriche:

figura 1.20




Frequenza di lavoro  f = 52000 Hz
Rp = 2000 ohm
Cp = 1800 pF
Xcp = 1700 ohm
Q = 1.17

Un conciso  commento sui dati deve essere fatto per chiarezza; in un trasduttore piezoelettrico il valore di Rp, che in un condensatore normale rappresenta soltanto le perdite, è l'insieme delle perdite e della resistenza mozionale  sulla quale riversare la potenza elettrica per l'emissione dell'energia acustica; il collegamento all'amplificatore richiede perciò l'accordo della parte capacitiva Cp affinché l'amplificatore possa riversare la propria potenza su di un carico puramente resistivo.
Per ottemperare all'esigenza sopra indicata è necessario trasformare il circuito parallelo di figura 1.20 nel circuito serie di figura 1.21 affinché su di esso possa essere calcolata l'induttanza di accordo.
Per la trasformazione sopra indicata dobbiamo applicare le formule relative a circuiti con $Q < 10$:

$$Rs = Rp \;/ (Q^2 + 1) = 2000 \text{ ohm} / ( 1.17^2 + 1 ) \approx 844 \text{ ohm}$$

$$Xcs = Xcp / [( 1/Q^2 ) + 1] = 1700 \text{ ohm} / [ (1 / 1.17^2 ) + 1 ] \approx 982 \text{ ohm}$$

dal valore di Xcs si calcola la capacità Cs:

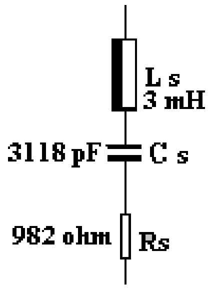
$$Cs = 1 / ( 6.28 * 52000 \text{ Hz} * 982 \text{ ohm} ) \approx 3118 \text{ pF}$$

ed infine il valore dell'induttanza del circuito risonante serie :

$$L = 982 \text{ ohm} / 6.28 * 52000 \text{ Hz} \approx 3 \text{ mH}$$

Con tutti i valori calcolati si risolve il nostro problema con il circuito risonante serie riportato in figura 1.21.

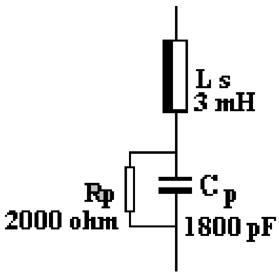
figura 1.21




Se, per esercizio, applicassimo al circuito di figura 1.21 le formule per la trasformazione da serie a parallelo ritroveremo i dati Cp; Rp di partenza.

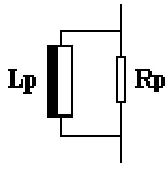
Il circuito di figura 1.21 mostra come si rappresenta graficamente il circuito accordato serie con tutti i parametri che abbiamo ottenuto dalla trasformazione parallelo-serie; dato però che l'induttanza Ls accorda di fatto il trasduttore, questa potrà figurare anche in serie alla configurazione originale dello stesso come riportato in figura 1.22

figura 1.22




Concludiamo questo paragrafo accennando al fatto che la trasformazione parallelo serie e viceversa può essere applicata anche nei casi in cui le perdite siano concentrate sull'induttanza in una configurazione parallelo così come si vede in figura 1.23.

figura 1.23




per la quale valgono le seguenti espressioni:

$$X_{Ls} \Leftrightarrow X_{Lp}$$

$$R_s \Leftrightarrow R_p$$

Per valori del coefficiente di merito Q  maggiore di 10  il legame tra i parametri diventa:

$$\mathbf{X_{Ls} = X_{Lp}}$$

$$\mathbf{R_s = R_p / Q^2}$$

Per valori del coefficiente di merito Q inferiori a 10, sussistono invece le seguenti relazioni:

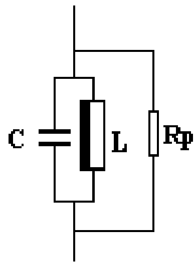
$$\mathbf{R_s = R_p \ / \ (Q^2 + 1)}$$

$$\mathbf{X_{Ls} = X_{Lp} \ / \ [(Q^2 + 1) / Q^2]}$$

### 1.6.4 La resistenza dinamica dei circuiti risonanti

Nel circuito risonante parallelo la resistenza Rp, che rappresenta le perdite complessive del circuito, gioca un ruolo importante nel dimensionamento dei circuiti elettronici che la impiegano.
Un circuito risonante parallelo, visto dall'elettronica, può essere schematizzato come in figura 1.24.

figura 1.24

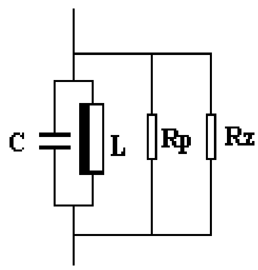



nel quale, come è noto, la resistenza Rp è data dall'espressione:

$$Rp = Q * X_L$$

Con il valore di Rp si deve dimensionare l'elettronica analogica che utilizza il circuito risonante parallelo dato che la corrente che scorre attraverso di esso, alla frequenza di risonanza, determina l'ampiezza della tensione ai capi del circuito stesso.
Ora, sia perché i valori di Rp sono difficilmente calcolabili con precisione, sia perché a volte sono richiesti valori della resistenza inferiori di Rp, è d'uso porre in parallelo ad Rp una resistenza Rz, resistenza zavorra, il cui valore, unitamente a quello di Rp, determina la resistenza complessiva detta resistenza dinamica (Rd).
Con la presenza di Rz la configurazione circuitale di figura 1.24 assume l'aspetto tracciato in figura 1.25.

figura 1.25




Per ottenere il valore Rz necessario affinché Rd assuma il valore occorrente all'impiego del circuito risonante si utilizza l'espressione:

$$\mathbf{Rz = ( Rp * Rd ) / ( Rp - Rd )}$$

Un semplice esempio è utile per puntualizzare il ragionamento:
Sia dato un circuito risonante parallelo in cui Rp sia 79500 ohm, si voglia una resistenza dinamica Rd = 9500 ohm, applicando la formula si avrà:

$$Rz = ( 79500 \text{ ohm} * 9500 \text{ ohm} ) / ( 79500 \text{ ohm} - 9500 \text{ ohm} ) \approx 10790 \text{ ohm}$$

Essendo la resistenza Rz molto inferiore ad Rp si comprende come la resistenza dinamica del circuito risonante sia prevalentemente condizionata da Rz e quindi più certo il valore di Rd.